国家教材委员会专家委员会审核通过 2019

普通高中教科书

# 数学

SHUXUE

选择性必修

第一册

湖北教育出版社

普通高中教科书 数学 选择性必修 第一册 湖北教育出版社

ISBN 978-7-5564-3144-1

普 通 高 中 教 科 书

# 数 学

SHUXUE

## 选择性必修

## 第一册

主　　编　　彭双阶

湖北教育出版社

**主　　编：**彭双阶

**副 主 编：**徐胜林　胡典顺　郭熙汉

**本册主编：**徐胜林

**主要编者：**乔安国　孔凡祥　杨　明　刘运新　徐胜林
胡典顺　高　云

# 致高中生

高中数学是一门非常重要的课程．数学以其卓越的智力成就被人们尊称为“科学的皇后”．数学是人类最高超的智慧活动，是人类心灵最独特的创造，是形成人类文化的主要力量，是人类文明的核心部分，是认识世界和创造世界的一把关键钥匙．

我们需要数学，因为作为人类文明发展标志的数学，是人类文化的重要组成部分．数学既是一种睿智的文化、一种思想的体操，更是现代科技进步中理性文化的核心．

我们需要数学，因为数学在形成人类理性思维和促进个人智力发展的过程中发挥着独特的、不可替代的作用．数学素养是现代社会公民应该具备的一种必备品格．

我们需要数学，因为数学是刻画自然规律和社会现象的特殊语言和有力工具，是自然科学、技术科学的基础，在经济科学、社会科学、人文科学的发展中发挥越来越强大的作用．

我们需要数学，因为数学已经渗透到现代社会和人们日常生活的各个方面．学好数学是提升生活质量、优化生活品质的重要保证．

本套教科书以《普通高中数学课程标准（2017 年版）》为依据来编写，遵循了现代数学教与学的规律，着眼于 21 世纪现代生活和未来发展，力求提升同学们的数学核心素养，更快地适应未来社会的发展．

教科书是教与学的一种重要资源．在使用本套教科书的同时，我们还应该多关注现实生活，关注社会进步和科技发展，用数学眼光观察世界，用数学思维思考世界，用数学语言表达世界．现代社会是信息社会，又是终身学习的社会．在这个大数据时代，我们可以根据实际条件，选择利用计算机与互联网，丰富学习资源，提高学习效率．积极参与数学活动，勤于思考，敢于质疑，乐于合作交流，克难奋进，砥砺前行，养成良好的数学学习习惯，让数学学习变得更加生动活泼、富有情趣．

亲爱的同学们，插上快乐的翅膀，带着青春的梦想，在浩瀚的数学海洋扬帆奋进吧！

Mulu

# 目 录

## 第 1 章 空间向量与立体几何



## 第 2 章 平面解析几何初步

Mulu

# 目 录

## 第 3 章 圆锥曲线的方程

# 第1章 空间向量与立体几何

我们已经学习了平面向量，知道向量是沟通代数、几何与三角函数的一种工具，并且有着极其丰富的实际背景．但我们生活在三维的现实空间中，二维的平面只是它的一部分，因此有必要把平面直角坐标系及平面向量推广到空间．

在“立体几何初步”的学习中，我们留下了一些尚待解决的问题，如：如何证明直线与平面平行、直线与平面垂直、平面与平面平行、平面与平面垂直的判定定理？如何计算直线与直线、直线与平面、平面与平面所成的角？如何计算点到直线的距离和点到平面的距离？

本章我们将学习空间直角坐标系、空间向量的概念及其运算规则，建立空间向量与空间图形之间的联系，用新的视角和方法来解决这些问题．

# 1.1 空间直角坐标系

如果一架飞机停在机场上，要确定飞机的位置，用该飞机所处的经度、纬度这两个量就可以实现．确定平面上一点的位置，可建立一个平面直角坐标系，由该点的横坐标、纵坐标就可以实现．

当飞机在空中飞行时，如何确定它在某一时刻所处的位置呢？

我们知道，除需要知道飞机投影到地面上的点所处的经度、纬度这两个量外，还需要给出飞机此时的飞行高度，这三个量才能够确定飞机此时所处的位置．要表示空间中点的位置，我们可以建立空间直角坐标系．

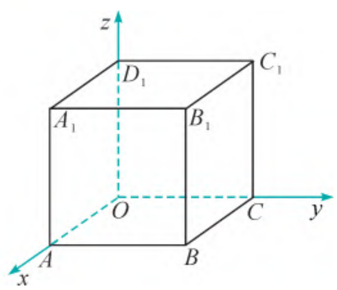



图 1-1

如图 1-1，$OABC\text{-}D_1A_1B_1C_1$ 是单位正方体（棱长为 1），以 $O$ 为原点，分别以射线 $OA$，$OC$，$OD_1$ 的方向为正方向，以线段 $OA$，$OC$，$OD_1$ 的长为单位长，建立三条数轴：$x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴．这时我们说建立了一个**空间直角坐标系** $Oxyz$，其中点 $O$ 叫作坐标原点，$x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴叫作**坐标轴**．通过每两个坐标轴的平面叫作**坐标平面**，分别称为 $xOy$ 平面、$yOz$ 平面、$zOx$ 平面．

在空间直角坐标系中，让右手拇指指向 $x$ 轴的正方向，食指指向 $y$ 轴的正方向，如果中指指向 $z$ 轴的正方向，则称这个坐标系为**右手直角坐标系**．在平面内画空间直角坐标系 $Oxyz$ 时，一般使 $\angle xOy=135^\circ$（或 $45^\circ$），$\angle yOz=90^\circ$．如无特别说明，本书建立的空间直角坐标系都是右手直角坐标系．

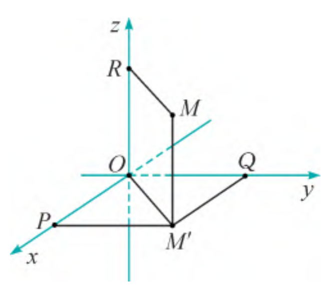



图 1-2

如图 1-2，在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，点 $M$ 在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上的射影 $P$，$Q$，$R$ 的坐标 $x$，$y$，$z$ 分别叫作点 $M$ 的**横坐标、纵坐标**和**竖坐标**，三者构成点 $M$ 的坐标，记作 $M(x, y, z)$.

设点 $M$ 在 $xOy$ 平面内的射影为 $M'$，点 $M'$ 在 $xOy$ 平面内的横坐标、纵坐标分别是点 $M$ 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的横坐标、纵坐标.

**例1** 在图 1-1 中，$OABC\text{-}D_1A_1B_1C_1$ 是单位正方体，写出四个顶点 $D_1$，$C$，$A_1$，$B_1$ 的坐标.

**解** 点 $D_1$ 在 $z$ 轴上，且 $|OD_1|=1$，它的竖坐标为 1，横坐标 $x$、纵坐标 $y$ 都为 0，所以点 $D_1$ 的坐标是 $(0, 0, 1)$.

同理可得，点 $C$，$A_1$，$B_1$ 的坐标分别是 $(0, 1, 0)$，$(1, 0, 1)$，$(1, 1, 1)$.

**例2** 如图 1-3(1)，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$AB=5$，$AD=4$，$AA'=3$. 以 $A'C$，$BD'$ 的交点 $O$ 为坐标原点，过点 $O$ 分别作面 $AD'$、面 $AB'$、面 $AC$ 的垂线，以它们为 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴，建立空间直角坐标系 $Oxyz$.

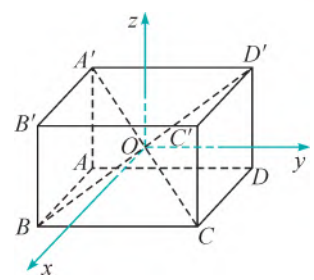


图 1-3(1)

(1) 写出长方体各顶点的坐标；

(2) 指出点 $H(0, -2, -1.5)$，$E(0, 2, 1.5)$，$F(0, 2, 0)$，$G(0, 0, -1.5)$ 在长方体棱上或者面内的位置.

**解** (1) 各顶点的坐标依次为：

$A(-2.5, -2, -1.5)$， $B(2.5, -2, -1.5)$，

$C(2.5, 2, -1.5)$， $D(-2.5, 2, -1.5)$，

$A'(-2.5, -2, 1.5)$， $B'(2.5, -2, 1.5)$，

$C'(2.5, 2, 1.5)$， $D'(-2.5, 2, 1.5)$.

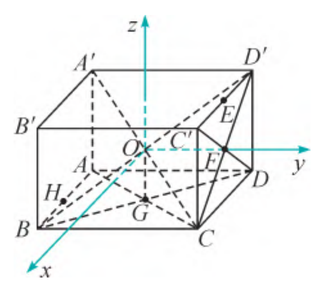


图 1-3(2)

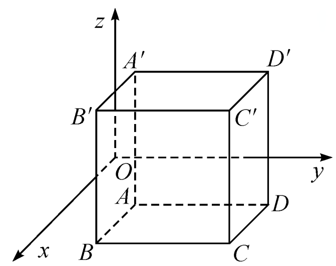
(2) $H$ 为棱 $AB$ 的中点，$E$ 是棱 $C'D'$ 的中点，$F$ 是面对角线 $CD'$ 与 $C'D$ 的交点，$G$ 是面对角线 $AC$ 与 $BD$ 的交点，如图 1-3(2).

## 练习

**1.** 如图，以正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的面 $A'B$ 的中心 $O$ 为坐标原点，$Ox\perp$ 面 $BC'$、$Oy\perp$ 面 $CD'$、$Oz\perp$ 面 $A'C'$ 建立空间直角坐标系 $Oxyz$，设正方体的棱长为 2.

(1) 求正方体各顶点的坐标；

(2) 标出点 $E(0,\ 0,\ 1)$，$F(0,\ 2,\ -1)$，$G\left(-\dfrac{1}{2},\ 2,\ 1\right)$，$H(1,\ 2,\ 0)$ 在图中的位置.



(第 1 题图)

**2.** 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，

(1) 哪一个坐标平面与 $x$ 轴垂直？与 $y$ 轴和 $z$ 轴垂直的又分别是哪一个坐标平面？

(2) 写出点 $P(2,\ 3,\ 4)$ 在三个坐标平面内的射影的坐标；

(3) 写出与点 $P(1,\ 3,\ 5)$ 关于坐标原点成中心对称的点的坐标.

**3.** 点 $B$ 是点 $A(3,\ 4,\ 5)$ 在坐标平面 $xOy$ 内的射影，求线段 $OB$ 的长.

## 习题 1.1

**1.** 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，已知点 $P$ 的坐标是 $(x,\ y,\ z)$.

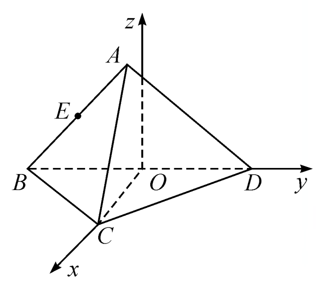
(1) 写出与点 $P$ 关于三个坐标平面对称的点的坐标；

(2) 写出与点 $P$ 关于三条坐标轴对称的点的坐标.

**2.** 如图，在正三棱锥 $A\text{-}BCD$ 中，已知底面边长为 $a$，高为 $h$，以 $BD$ 的中点 $O$ 为坐标原点、$OC$ 所在直线为 $x$ 轴、$OD$ 所在直线为 $y$ 轴建立空间直角坐标系 $Oxyz$.

(1) 写出三棱锥 $A\text{-}BCD$ 各顶点及 $AB$ 的中点 $E$ 的坐标；

(2) 标出点 $F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}a,\ -\dfrac{1}{4}a,\ 0\right)$、点 $G\left(0,\ \dfrac{1}{4}a,\ 0\right)$ 和点 $H\left(\dfrac{\sqrt{3}}{12}a,\ \dfrac{1}{4}a,\ \dfrac{1}{2}h\right)$ 在图中的位置.



(第 2 题图)

# 1.2 空间向量及其运算

空间图形的性质和位置关系是立体几何研究的基本对象. 我们知道，平面向量是研究平面图形的性质及位置关系的重要工具. 同样，空间向量也是研究空间图形的性质及位置关系的重要工具.

与平面向量一样，在空间，我们把具有大小和方向的量叫作**空间向量**（space vector），向量的大小叫作**向量的模**（或**长度**）.

空间向量也用有向线段表示，有向线段的长度表示向量的模，起点为 $A$、终点为 $B$ 的向量 $\boldsymbol{a}$ 也可以记作$\overrightarrow{AB}$，其模记作 $|\boldsymbol{a}|$或$|\overrightarrow{AB}|$.

模为 0 的向量叫作**零向量**，记作 $\mathbf{0}$. 当有向线段的起点 $A$ 与终点 $B$ 重合时，$\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$.

模为 1 个单位的向量叫作**单位向量**.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 模相等且方向相反的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的**相反向量**，记作$-\boldsymbol{a}$.

模相等且方向相同的向量叫作**相等向量**. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 在空间，方向相同且等长的有向线段表示同一向量或相等向量.

对于空间任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，我们可过空间中任一点 $O$ 作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. 因为 $O$，$A$，$B$ 三点共面，所以可用同一平面内的两条有向线段表示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$（如图 1-4）.

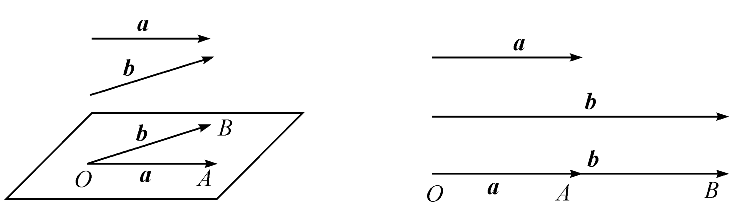



图 1-4

这样，空间向量的加法和减法运算就可以通过平面向量的相应运算来实现（如图 1-5）.

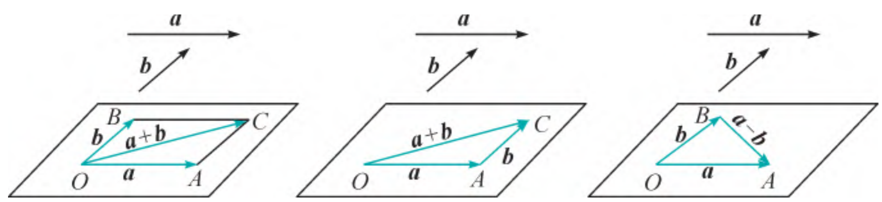



图 1-5

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，或 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$；

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

空间向量的加法运算满足交换律及结合律：

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

请同学们根据图 1-6 来验证空间向量加法运算的结合律.

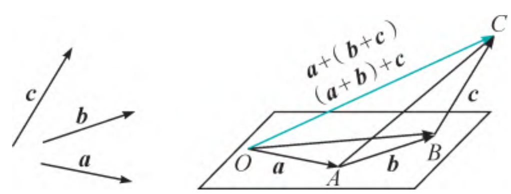



图 1-6

与平面向量一样，实数 $\lambda$ 与空间向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 仍然是一个向量，这种运算叫作**向量的数乘**. 如图 1-7，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$.

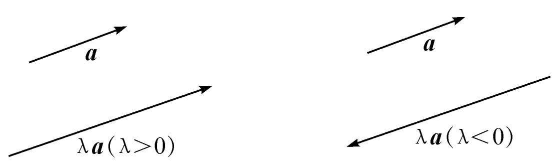



图 1-7

空间向量的数乘运算满足分配律及结合律：

$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；

$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

如果表示空间非零向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，那么这些向量叫作**平行向量**或**共线向量**. $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$ 记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 规定：零向量 $\mathbf{0}$ 与任一向量平行.

由于空间任一组平行向量都可平移到同一直线上，因此，平面向量共线的充要条件在空间也是成立的.

**共线向量定理**　对空间任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$），$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 $\lambda$，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

有了共线向量定理，就能把几何中的三点共线问题、两直线平行问题通过向量的形式反映出来.

**例1**　已知平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$（如图 1-8），化简下列向量表达式，并在图上标出化简结果.

（1）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}$；

（2）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

底面是平行四边形的四棱柱叫作平行六面体.

**解**　（1）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$；

（2）
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\\=&\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}\\=&\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}.\end{aligned}$$

向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AC'}$ 如图 1-8 所示.

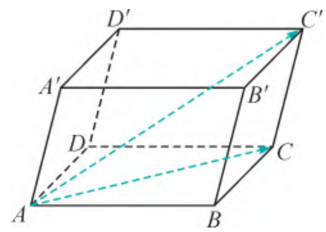


图 1-8

**例2**　已知空间四边形 $ABCD$（如图 1-9）. 连接 $AC$，$BD$，$M$ 为 $BC$ 的中点. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{DM}$.

**解**　因为点 $M$ 是 $BC$ 的中点，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DM}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})\\&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

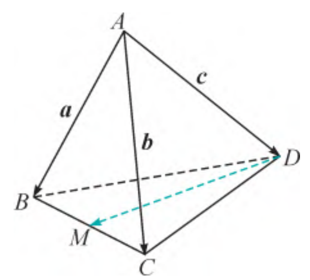


图 1-9

**例3** 如图 1-10，在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，点 $M$，$N$，$P$ 分别是棱 $AB$，$CC'$，$DD'$ 的中点，点 $Q$ 是线段 $AN$ 上的点，且 $AQ=\frac{1}{3}AN$. 求证：$P$，$Q$，$M$ 三点共线.

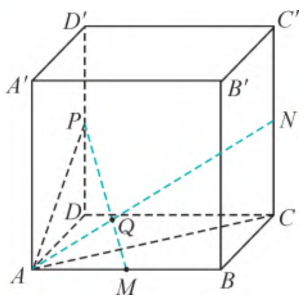


图 1-10

**证明** 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，则

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}.$$

所以 $$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{6}\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}.$$

所以 $$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{6}\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$$

$$=-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{6}\boldsymbol{c}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right),$$

即 $$\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MP},$$

所以 $\overrightarrow{MQ}$ 与 $\overrightarrow{MP}$ 共线，从而 $P$，$Q$，$M$ 三点共线.

向量的投影是高维空间到低维子空间的一种线性变换，得到的是低维空间向量.

如图 1-11(1)，在空间中，向量 $\boldsymbol{a}$ 向平面 $\alpha$ 投影得到的是向量 $\boldsymbol{c}$；如图 1-11(2)，在空间中，向量 $\boldsymbol{a}$ 向直线 $l$ 投影得到的是与直线 $l$ 平行的向量 $\boldsymbol{c}$；如图 1-11(3)，在空间中，向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$ 的投影，是指向量 $\boldsymbol{a}$ 向与向量 $\boldsymbol{b}$ 共线的向量构成的子空间的投影，得到的是与向量 $\boldsymbol{b}$ 共线的向量 $\boldsymbol{c}$. 向量 $\boldsymbol{c}$ 称为投影向量.

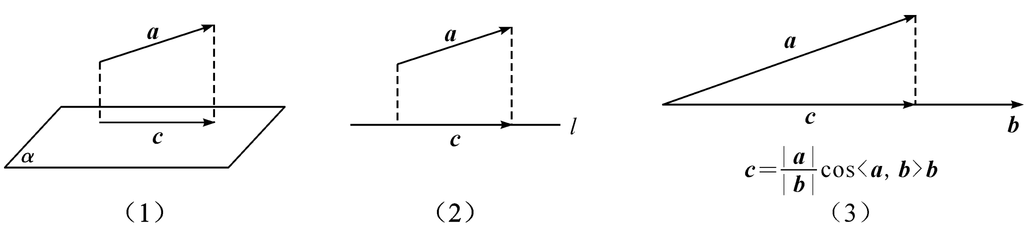


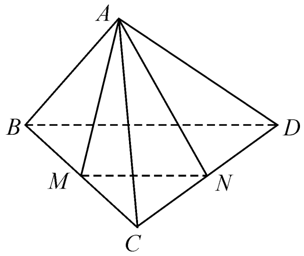
图 1-11

如图 1-11(1)，不难看出，向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 垂直，这就意味着，当向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 起点相同时，终点间的距离最小，此时，三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 构成一个直角三角形.

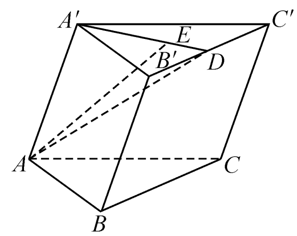
## 练习

**1.** 如图，已知空间四边形 $ABCD$，连接 $AC$，$BD$. 设点 $M$，$N$ 分别是 $BC$，$CD$ 的中点，化简下列各表达式，并在图中标出化简结果.

（1）$\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$；　（2）$\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

**2.** 如图，平移△$ABC$ 到△$A'B'C'$，连接对应顶点，点 $D$ 是$B'C'$的中点，点 $E$ 在线段$A'D$ 上，且 $A'E=2ED$.

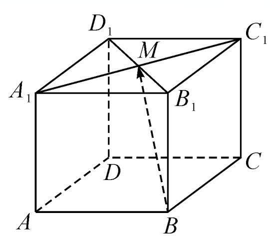
（1）用$\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$表示$\overrightarrow{AD}$；　（2）用$\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{A'C'}$表示$\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AA'}$.

## 习题 1.2

**1.** 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $M$ 为 $A_1C_1$ 与 $B_1D_1$ 的交点. 若$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则下列向量中与$\overrightarrow{BM}$相等的向量是（　　）.

（A）$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　（B）$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

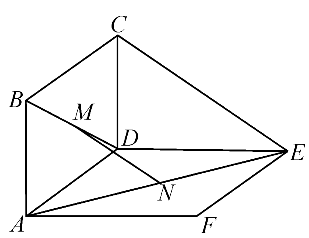
（C）$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　（D）$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$



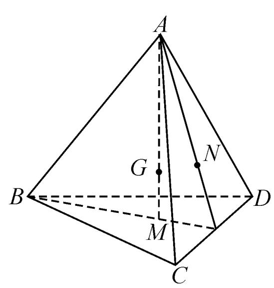
（第 1 题图）

**2.** 在四面体 $ABCD$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$，点 $M$，$N$ 分别满足$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{NM}$. 试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量$\overrightarrow{AM}$.

**3.** 如图，已知矩形 $ABCD$ 和矩形 $ADEF$，它们以 $AD$ 为公共边，但不在同一平面上. 点 $M$，$N$ 分别是 $BD$，$AE$ 的中点. 试用向量的方法证明：$MN /\!/ CE$.



（第 3 题图）



（第 4 题图）

**4.** 如图，点 $M$，$N$ 分别为四面体 $ABCD$ 的面 $BCD$ 与面 $ACD$ 的重心，$G$ 为 $AM$ 上一点，且 $GM:GA=1:3$. 求证：$B$，$G$，$N$ 三点共线.

# 1.3 空间向量基本定理及坐标表示

## 1.3.1 空间向量基本定理

我们知道，平面内的任一向量可用两个不共线的向量表示．那么，对于空间的任一向量，是否也有类似的结论呢？

为此，我们先给出共面向量的概念．

已知平面 $\alpha$ 和向量 $\boldsymbol{a}$，如果表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段所在的直线平行于平面 $\alpha$ 或在 $\alpha$ 内，那么我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于平面 $\alpha$，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\alpha$（如图 1-12）．我们把平行于同一平面的向量叫作**共面向量**．

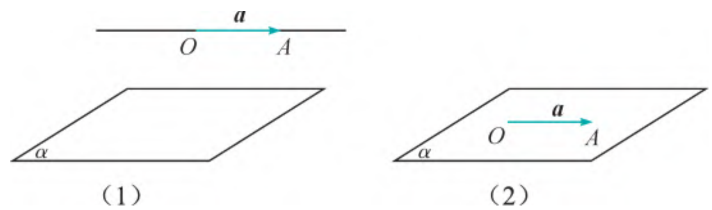



图 1-12

根据平面向量基本定理，可以证明，若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，则向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是：存在实数对 $(x,\ y)$，使得

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}.$$

如果三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，过空间一点 $O$ 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，如图 1-13.

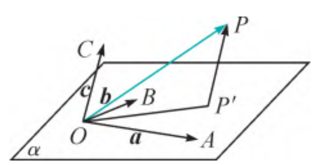



图 1-13

对于空间任一向量 $\boldsymbol{p}$，作 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$，$PP'/\!/OC$，交平面 $OAB$ 于点 $P'$，则存在实数 $z$，使得

$$\overrightarrow{P'P}=z\overrightarrow{OC}. \qquad ①$$

因为$\overrightarrow{OP'}$与$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$共面，所以存在实数 $x$，$y$，使得

$$\overrightarrow{OP'}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}. \qquad ②$$

由①，②得

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{P'P}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}.$$

即有

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}.$$

显然，这里的$(x, y, z)$是唯一的.

于是有如下定理：

**空间向量基本定理** 如果三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，那么对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序数组$(x, y, z)$，使得

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}.$$

由空间向量基本定理可知，若三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，则空间任一向量都可以由向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示. 这就是说，所有空间向量所组成的集合是

$$\{\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c},\ x,\ y,\ z\in\mathbf{R}\}.$$

我们把$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$叫作空间的一个**基底**(base)，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 都叫作**基向量**(base vectors). 显然，空间任意三个不共面的向量都可以构成空间的一个基底.

如果空间一个基底的三个基向量两两互相垂直，那么这个基底叫作**正交基底**. 特别地，当一个正交基底的三个基向量都是单位向量时，称这个基底为**单位正交基底**，通常用$\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$表示.

**推论** 设 $O$，$A$，$B$，$C$ 是不共面的四点，则对空间任一点 $P$，都存在唯一的有序数组$(x, y, z)$，使得

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}.$$

**例1** 如图 1-14，在平行六面体 $OABC\text{-}O'A'B'C'$ 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OO'}=\boldsymbol{c}$，点 $M$，$N$ 分别是 $OO'$，$AC$ 的中点. 分别求以下向量关于基底$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$的有序数组$(x, y, z)$：$\overrightarrow{BA'}$，$\overrightarrow{CA'}$，$\overrightarrow{MN}$.

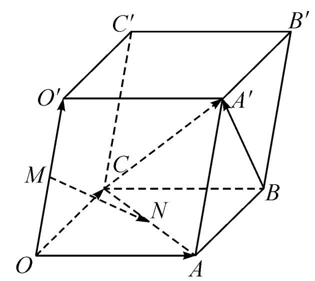


图 1-14

**解** $\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OO'}-\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$,

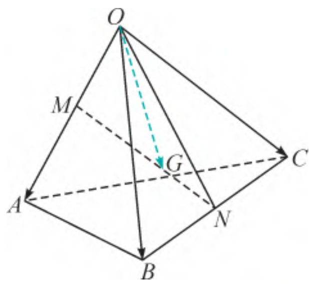
$\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OO'}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}.$$

所以，向量$\overrightarrow{BA'}$，$\overrightarrow{CA'}$，$\overrightarrow{MN}$关于基底$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$的有序数组分别为$(0, -1, 1)$，$(1, -1, 1)$，$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

## 练习

1. 如果向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$与任何向量都不能构成空间的一个基底，那么$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$间应有什么关系？
2. 已知$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$是空间的一个基底，从$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$中选哪一个向量，才能保证它一定能与向量$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$构成空间的另一个基底？
3. 如图，已知空间四边形$OABC$，其对角线为$OB$，$AC$. 点$M$，$N$分别是边$OA$，$BC$的中点，点$G$在线段$MN$上，且$MG=2GN$. 用基向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$表示向量$\overrightarrow{OG}$.



（第 3 题图）

## 1.3.2 空间向量的数量积

对于两个非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在空间中任取一点$O$，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则$\angle AOB$叫作**向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角**，记作$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$（如图 1-15）.

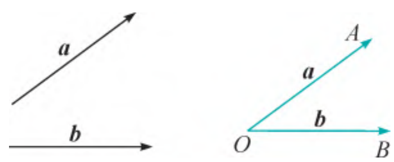


图 1-15

当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向时，$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=0$；当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反向时，$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\pi$.

通常规定，$0\leqslant\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$. 在此规定下，两个向量的夹角是唯一确定的，并且$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle$.

如果$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$，则称$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$**互相垂直**（如图 1-16），记作$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

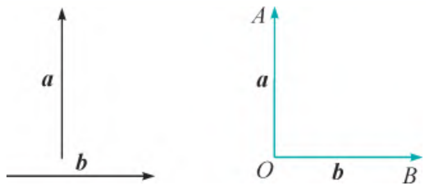



图 1-16

对于空间两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，我们把 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 叫作**$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积**，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle.$$

规定：零向量与任何向量的数量积为 0.

空间向量的数量积具有如下性质：

(1) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

(2) $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$.

空间向量的数量积满足如下运算律：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

**例 1** 图 1-17 表示一个棱长为 $a$ 的正方体，求：

(1) $\overrightarrow{C_1B}\cdot\overrightarrow{D_1B_1}$；

(2) $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{C_1B}$.

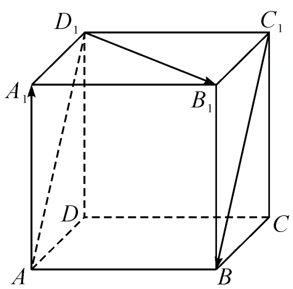



图 1-17

**解** (1) 因为 $\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{C_1B}$，所以

$$\langle\overrightarrow{C_1B},\overrightarrow{D_1B_1}\rangle=\langle\overrightarrow{D_1A},\overrightarrow{D_1B_1}\rangle=\angle AD_1B_1=\frac{\pi}{3}.$$

又 $|\overrightarrow{C_1B}|=|\overrightarrow{D_1B_1}|=\sqrt{2}a$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C_1B}\cdot\overrightarrow{D_1B_1}&=|\overrightarrow{C_1B}||\overrightarrow{D_1B_1}|\cos\langle\overrightarrow{C_1B},\overrightarrow{D_1B_1}\rangle\\&=(\sqrt{2}a)^2\times\cos\frac{\pi}{3}=a^2.\end{aligned}$$

(2) 由 $\angle BC_1C=\frac{\pi}{4}$ 可知，$\langle\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{C_1B}\rangle=\frac{3\pi}{4}$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{C_1B}&=|\overrightarrow{AA_1}||\overrightarrow{C_1B}|\cos\langle\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{C_1B}\rangle\\&=a\times\sqrt{2}a\times\cos\frac{3\pi}{4}=-a^2.\end{aligned}$$

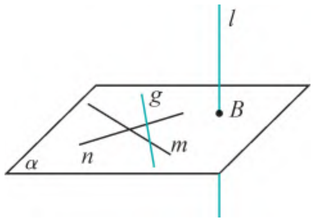


图 1-18

**例2** 如图 1-18，$m$，$n$ 是平面 $\alpha$ 内的两条相交直线，直线 $l$ 与平面 $\alpha$ 交于点 $B$，且 $l\perp m$，$l\perp n$. 求证：$l\perp\alpha$.

**证明** 设直线 $g$ 是平面 $\alpha$ 内任意一条直线，分别在 $l$，$m$，$n$，$g$ 上取非零向量 $\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{g}$. 由 $m$ 与 $n$ 相交，知向量 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 不平行. 由三个向量共面的充要条件知，存在唯一的有序实数对 $(x, y)$，使

$$\boldsymbol{g}=x\boldsymbol{m}+y\boldsymbol{n},$$

所以 $$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{g}=x\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}+y\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}.$$

因为 $l\perp m$，$l\perp n$，所以 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}=0$，$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=0$，从而 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{g}=0$，故 $\boldsymbol{l}\perp\boldsymbol{g}$，即有

$$l\perp g.$$

这就证明了直线 $l$ 垂直于平面 $\alpha$ 内的任意一条直线，所以 $l\perp\alpha$.

**例3** 如图 1-19，在空间四边形 $OABC$ 中，$OA\perp BC$，$OB\perp AC$. 求证：$OC\perp AB$.

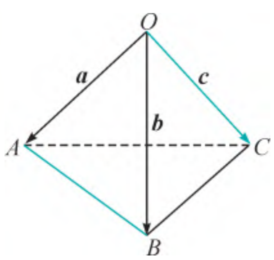


图 1-19

**证明** 把$\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$作为空间的一个基底.

设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$.

由已知得$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AC}$，所以

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=0,$$

即 $$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0,\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=0,$$

所以 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$$

从而

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0,$$

所以 $OC\perp AB$.

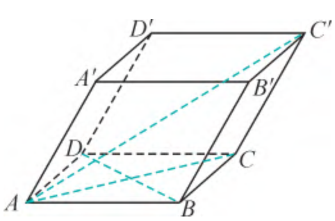


图 1-20

**例4** 如图 1-20，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$中，$AB=AD=AA'=1$，$\angle BAD=\angle BAA'=\angle DAA'=60^\circ$.

(1) 求证：$BD\perp AC'$；

(2) 求 $AC'$的长.

**证明** （1）设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$.

把$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$作为空间的一个基底，则

$$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC'}&=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\&=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\&=1-1+\cos 60^\circ-\cos 60^\circ=0,\end{aligned}$$

所以$\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{AC'}$，即 $BD\perp AC'$.

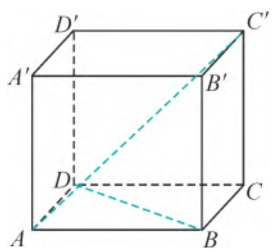
**解** （2）因为$\overrightarrow{AC'}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，所以

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AC'}|^2&=\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{AC'}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2\\&=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\&=1+1+1+2\cos 60^\circ+2\cos 60^\circ+2\cos 60^\circ\\&=6.\end{aligned}$$

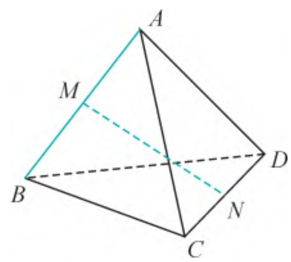
所以 $AC'=\sqrt{6}$.

## 练习

1. 如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，求证：$BD\perp AC'$.




（第 1 题图）

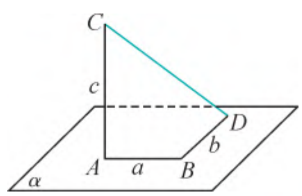



（第 2 题图）

2. 如图，空间四边形 $ABCD$ 的每条边和对角线的长都等于 $a$，点 $M$，$N$ 分别是边 $AB$，$CD$ 的中点. 求证：$MN\perp AB$.

3. 如图，线段 $AB$，$BD$ 在平面 $\alpha$ 内，$BD\perp AB$，$AC\perp\alpha$. 如果 $AB=a$，$BD=b$，$AC=c$，求 $CD$ 的长.

4. 在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$中，已知 $AB=5$，$AD=3$，$AA'=7$，$\angle BAD=60^\circ$，$\angle BAA'=\angle DAA'=45^\circ$. 求 $AC'$ 的长.




（第 3 题图）

## 1.3.3 空间向量的坐标表示

给定一个空间直角坐标系 $Oxyz$ 和向量 $\boldsymbol{a}$，设 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别为与 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴方向相同的单位向量（如图 1-21）．由空间向量基本定理可知，存在唯一的有序实数组 $(x, y, z)$，使

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

有序数组 $(x, y, z)$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标，记作 $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$.

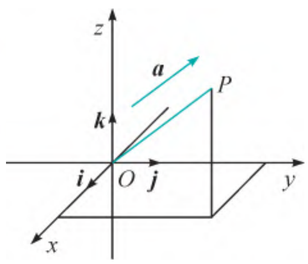


图 1-21

显然，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 分别为向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 的投影向量，且 $x=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}$，$y=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}$，$z=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}$.

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中（如图 1-21），空间的任一点 $P(x, y, z)$ 对应一个向量：

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

由此可知，向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标就是点 $P$ 的坐标.

设 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$，与平面向量的坐标运算类似，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3);$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3);$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)\ (\lambda\in\mathbf{R});$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

**例 1** 已知 $\boldsymbol{a}=(2, 2, -1)$，$\boldsymbol{b}=(3, -1, 4)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$4\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

**解**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(2, 2, -1)+(3, -1, 4)\\&=(2+3, 2-1, -1+4)\\&=(5, 1, 3);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(2, 2, -1)-(3, -1, 4)\\&=(2-3, 2+1, -1-4)\\&=(-1, 3, -5);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\boldsymbol{a}&=4(2, 2, -1)\\&=(4\times2, 4\times2, 4\times(-1))\\&=(8, 8, -4);\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times3+2\times(-1)+(-1)\times4=0.$$

如上所述，向量$\overrightarrow{OP}$的坐标就是点 $P$ 的坐标（$O$ 是空间直角坐标系的原点），那么向量$\overrightarrow{AB}$的坐标与$A$，$B$ 两点的坐标有什么关系呢？

设点 $A$，$B$ 的坐标分别为$(x_1, y_1, z_1)$，$(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2, y_2, z_2)-(x_1, y_1, z_1)\\&=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).\end{aligned}$$

这就是说，一个向量在空间直角坐标系中的坐标等于表示这个向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标.

空间向量用坐标表示后，我们就可以通过坐标运算来研究两个向量之间的关系. 事实上，有如下结论：

设 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$.

（1）$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$存在实数$\lambda\in\mathbf{R}$，使得 $a_1=\lambda b_1, a_2=\lambda b_2, a_3=\lambda b_3$；

（2）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$；

（3）$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

在空间直角坐标系中，已知点 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，则 $A$，$B$ 两点间的距离

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

**例2** 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，求证：$DB_1\perp$平面 $ACD_1$.

**证明** 如图 1-22，建立空间直角坐标系 $Dxyz$. 不妨设正方体的棱长为 1 个单位长度，则

$$\overrightarrow{DB_1}=(1, 1, 1),$$

$$\overrightarrow{AC}=(0, 1, 0)-(1, 0, 0)=(-1, 1, 0),$$

所以

$$\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-1)+1\times1+1\times0=0.$$

所以$\overrightarrow{DB_1}\perp\overrightarrow{AC}$，故 $DB_1\perp AC$.

同理可证 $DB_1\perp AD_1$.

又 $AD_1\cap AC=A$，所以 $DB_1\perp$平面 $ACD_1$.

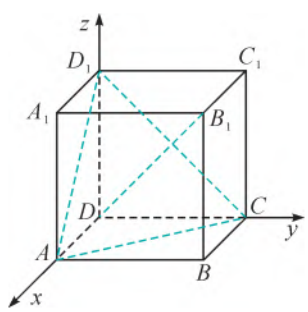
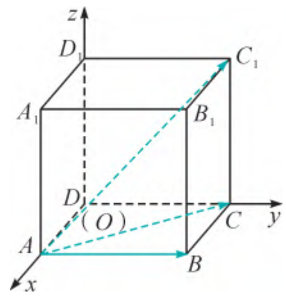


图 1-22

## 练习




(第 1 题图)

**1.** 建立如图所示空间直角坐标系，其中正方体 $AC_1$ 的棱长为 2. 求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AC_1}$ 的坐标.

**2.** 写出下列各题中向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标(以下 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别为空间直角坐标系 $Oxyz$ 中与 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴方向相同的单位向量)：

(1) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$；　　(2) $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{k}$；

(3) $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$；　　(4) $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{j}$.

**3.** 已知 $\boldsymbol{a}=(2,\ -3,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(3,\ 1,\ -2)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；　(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；　(3) $6\boldsymbol{a}$；　(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

**4.** 已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ 5,\ -1)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ 0,\ 1)$，$\boldsymbol{c}=(0,\ 0,\ 2)$. 求 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ 和 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$.

**5.** 判定下列各题中的两个向量是否平行：

(1) $\boldsymbol{a}=(1,\ 2,\ -3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,\ -4,\ 6)$；

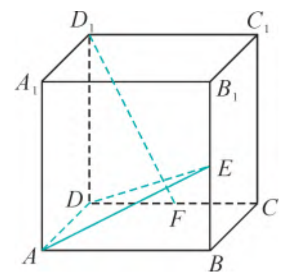
(2) $\boldsymbol{c}=(-2,\ 3,\ 4)$，$\boldsymbol{d}=(6,\ -9,\ 12)$.

**6.** 求下列两点间的距离：

(1) $A(-3,\ 2,\ 5)$，$B(1,\ 5,\ -1)$；

(2) $C(2,\ -3,\ 1)$，$D(2,\ 0,\ 3)$.

**7.** 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $E$，$F$ 分别是棱 $BB_1$，$CD$ 的中点. 求证：$D_1F\perp$平面 $ADE$.

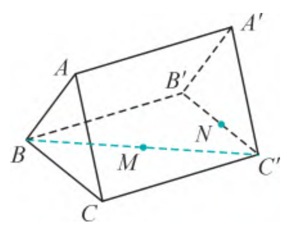



(第 7 题图)

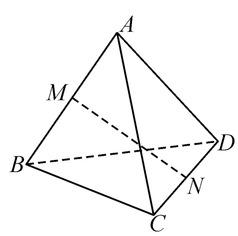
## 习题 1.3

**1.** 如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A'B'C'$中，点 $M$ 是 $BC'$的中点，点 $N$ 是 $B'C'$的中点. 化简下列向量表达式，并在图中标出化简结果：

(1) $\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$；　　(2) $\overrightarrow{AA'}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.




(第 1 题图)




(第 2 题图)

**2.** 如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，点 $M$，$N$ 分别是边 $AB$，$CD$ 的中点.

(1) 化简：$\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{DN}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD})$；

(2) 用$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BD}$表示$\overrightarrow{MN}$.

**3.** 已知 $A$，$B$，$C$ 三点不共线，对平面 $ABC$ 外的任一点 $O$，点 $M$ 满足：

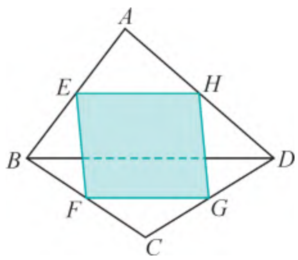
$$2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC},$$

试判断点 $M$ 是否与 $A$，$B$，$C$ 共面.

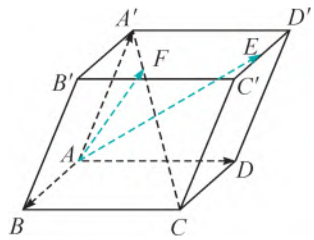
**4.** 如图，点 $E$，$F$，$G$，$H$ 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 $AB$，$BC$，$CD$，$DA$ 的中点.

（1）用向量方法证明 $E$，$F$，$G$，$H$ 四点共面；

（2）用向量方法证明 $BD$//平面 $EFGH$.




（第 4 题图）

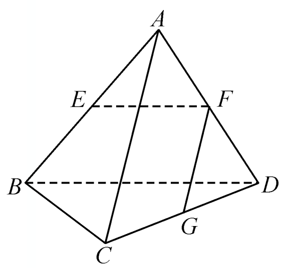



（第 5 题图）

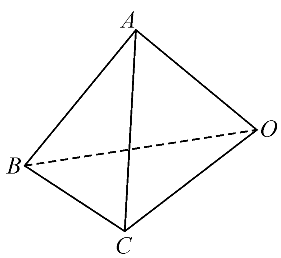
**5.** 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$. 点 $E$ 是 $C'D'$ 的中点，点 $F$ 在 $CA'$ 上，且 $CF:FA'=4:1$. 分别用基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 表示向量 $\overrightarrow{AE}$ 和 $\overrightarrow{AF}$.

**6.** 如图，空间四边形 $ABCD$ 的每条边和对角线的长都等于 $a$，点 $E$，$F$，$G$ 分别是 $AB$，$AD$，$DC$ 的中点. 求下列向量的数量积：

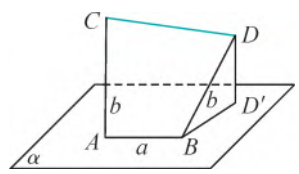
（1）$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$；　（2）$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$；　（3）$\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{AC}$；　（4）$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}$.




（第 6 题图）




（第 7 题图）




（第 8 题图）

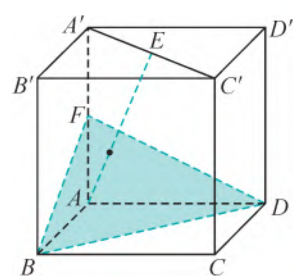
**7.** 如图，已知在空间四边形 $OABC$ 中，$OB=OC$，且 $\angle AOB=\angle AOC$. 求证：$OA\perp BC$.

**8.** 如图，已知线段 $AB$ 在平面 $\alpha$ 内，线段 $AC\perp\alpha$，线段 $BD\perp AB$，线段 $DD'\perp\alpha$，$\angle DBD'=30^\circ$. 如果 $AB=a$，$AC=BD=b$，求 $CD$.

**9.** 已知 $\boldsymbol{a}=(2, 4, m)$，$\boldsymbol{b}=(n, 2, 3)$. 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 $m$，$n$ 的值.

**10.** 已知 $\boldsymbol{a}=(2, -1, 3)$，$\boldsymbol{b}=(-4, 2, x)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 求 $x$ 的值.

**11.** 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，点 $E$ 是 $A'C'$ 的中点，点 $F$ 是 $AA'$ 的中点. 求证：$AE\perp$平面 $BDF$.




（第 11 题图）

# 1.4 空间向量的应用

## 1.4.1 直线的方向向量和平面的法向量

**1. 直线的方向向量**

为了刻画空间直线的方向，我们把与空间直线 $l$ 平行的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 叫作直线 $l$ 的**方向向量**(direction vector)(如图1-23). 容易知道，一条直线的方向向量有无数多个，它们都与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行.

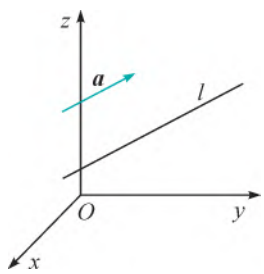



图 1-23

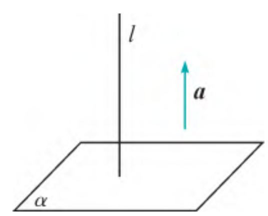



图 1-24

**2. 平面的法向量**

如果表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段所在的直线垂直于平面 $\alpha$，则称这个向量垂直于平面 $\alpha$，记作 $\boldsymbol{a}\perp\alpha$(如图 1-24). 我们把与平面 $\alpha$ 垂直的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 叫作平面 $\alpha$ 的**法向量**(normal vector). 一个平面的法向量有无数多个，它们的方向相同或相反，它们都互相平行. 平面 $\alpha$ 的模为 1 的法向量称为平面 $\alpha$ 的**单位法向量**.

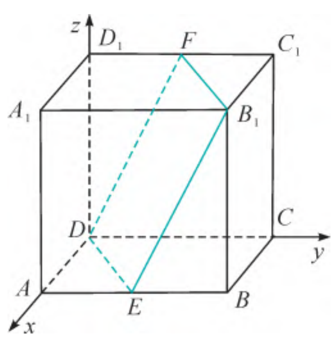



图 1-25

**例1** 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $E$，$F$ 分别是 $AB$，$C_1D_1$ 的中点. 求下列平面的一个法向量(用坐标表示)：

(1) 平面 $BCC_1B_1$； (2) 平面 $EB_1FD$.

**解** 如图 1-25，以 $D$ 为坐标原点，建立空间直角坐标系. 设正方体的棱长为 2.

(1) 因为 $y$ 轴垂直于平面 $BCC_1B_1$，所以平面 $BCC_1B_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0，1，0)$.

(2) 点 $D$，$E$，$F$ 的坐标分别为 $(0, 0, 0)$，$(2, 1, 0)$，$(0, 1, 2)$，从而 $\overrightarrow{DE}=(2, 1, 0)$，$\overrightarrow{DF}=(0, 1, 2)$.

设平面 $EB_1FD$ 的法向量是 $\boldsymbol{n}_2=(u, v, w)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DF}=0,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}2u+v=0,\\ v+2w=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}u=w,\\ v=-2w.\end{cases}$

不妨取 $w=1$，得 $u=1$，$v=-2$.

所以平面 $EB_1FD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1, -2, 1)$.

**练习**

1. 已知平面 $\alpha$ 过三点 $A(2, 3, 3)$，$B(0, -2, 1)$，$C(-3, 4, 1)$. 求：

   (1) 直线 $AB$ 的一个方向向量；　　(2) 平面 $\alpha$ 的一个法向量.

2. 已知三点 $A(2, 3, -3)$，$B(4, 5, -2)$，$C(6, 8, 0)$. 求平面 $ABC$ 的一个法向量和一个单位法向量.

## 1.4.2 空间向量在直线、平面位置关系判定中的应用

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别是直线 $a$，$b$ 的一个方向向量，$\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 $\alpha$，$\beta$ 的一个法向量. 我们可以用向量语言来表述空间线线、线面、面面的垂直与平行关系，如下表所示：

| 位置关系 | 向量表示 | |
|---|---|---|
| $a/\!/b$ 或 $a$ 与 $b$ 重合 | $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行 | 存在非零实数 $\lambda$，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ |
| $a\perp b$ | $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直 | $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ |
| $a\subset\alpha$ 或 $a/\!/\alpha$ | $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{n}_1$ 垂直 | $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}_1=0$ |
| $a\perp\alpha$ | $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{n}_1$ 平行 | 存在非零实数 $\lambda$，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{n}_1$ |
| $\alpha/\!/\beta$ 或 $\alpha$ 与 $\beta$ 重合 | $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 平行 | 存在非零实数 $\lambda$，使 $\boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2$ |
| $\alpha\perp\beta$ | $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 垂直 | $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$ |

**例1** 求证：在平面内的一条直线，如果它与这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也与这条斜线垂直.

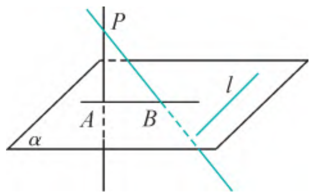


图 1-26

已知：如图 1-26，$PA$，$PB$ 分别是平面 $\alpha$ 的垂线和斜线，$AB$ 是 $PB$ 在平面 $\alpha$ 内的射影. $l\subset\alpha$，$l\perp AB$.

求证：$l\perp PB$.

**证明** 设 $\boldsymbol{a}$ 是直线 $l$ 的一个方向向量.

因为 $PA\perp\alpha$，$l\subset\alpha$，所以 $PA\perp l$，所以

$$\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{a}=0.$$

因为 $l\perp AB$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{a}=0$，从而可得

$$\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{a}=(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB})\cdot\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{a}+\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{a}=0+0=0,$$

所以 $l\perp PB$.

同样我们可以证明：在平面内的一条直线，如果它与这个平面的一条斜线垂直，那么它也与这条斜线在平面内的射影垂直.

**例2** 求证：若平面 $\beta$ 经过平面 $\alpha$ 的一条垂线 $a$，则 $\beta\perp\alpha$.

**证明** 设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 $\alpha$，$\beta$ 的一个法向量，$\boldsymbol{a}$ 是直线 $a$ 的一个方向向量.

由 $a\perp\alpha$ 知，$\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，即存在非零实数 $\lambda$，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{n}_1$.

由平面 $\beta$ 经过直线 $a$，得 $\boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{a}=0$，即 $\boldsymbol{n}_2\cdot\lambda\boldsymbol{n}_1=0$. 而 $\lambda\neq0$，故 $\boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{n}_1=0$，所以平面 $\alpha$ 与平面 $\beta$ 垂直.

**例3** 求证：如果平面外一条直线与这个平面内的一条直线平行，那么这条直线与这个平面平行.

已知：$l\not\subset\alpha$，$m\subset\alpha$，$l/\!/m$. 求证：$l/\!/\alpha$.

**证明** 分别取直线 $l$，$m$ 上的一个方向向量 $\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{m}$，在平面 $\alpha$ 内取两个不共线的非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$.

因为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{m}$ 共面，所以存在实数对 $(x, y)$，使得

$$\boldsymbol{m}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}.$$

又 $l/\!/m$，所以 $\boldsymbol{l}/\!/\boldsymbol{m}$，则存在实数 $\lambda$，使得 $\boldsymbol{l}=\lambda\boldsymbol{m}$，从而

$$\boldsymbol{l}=\lambda\boldsymbol{m}=(\lambda x)\boldsymbol{a}+(\lambda y)\boldsymbol{b},$$

所以向量 $\boldsymbol{l}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面. 又 $l\not\subset\alpha$，所以 $l/\!/\alpha$.

**例4** 如图 1-27，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，$BC=1$，$AA_1=\sqrt{6}$，点 $M$ 是棱 $CC_1$ 的中点．求证：$AB_1\perp A_1M$.

**证明** 因为$\angle ACB=90^\circ$，又 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，可如图 1-27 建立空间直角坐标系.

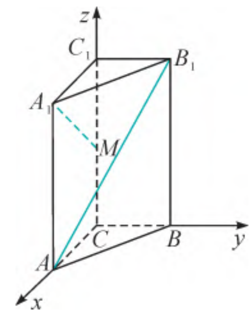


图 1-27

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=30^\circ$，$BC=1$，所以 $AC=\sqrt{3}$. 于是点 $A$，$B_1$，$A_1$，$M$ 的坐标分别为 $(\sqrt{3},0,0)$，$(0,1,\sqrt{6})$，$(\sqrt{3},0,\sqrt{6})$，$\left(0,0,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$．从而

$$\overrightarrow{A_1M}=\left(-\sqrt{3},0,-\frac{\sqrt{6}}{2}\right),\ \overrightarrow{AB_1}=(-\sqrt{3},1,\sqrt{6}).$$

因为

$$\overrightarrow{A_1M}\cdot\overrightarrow{AB_1}=(-\sqrt{3})\times(-\sqrt{3})+0\times1+\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\times\sqrt{6}=0,$$

所以$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{A_1M}$，即 $AB_1\perp A_1M$.

**例5** 如图 1-28，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 $E$，$F$ 分别在 $BD$，$D_1C$ 上，且 $DE=D_1F=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$．求证：$EF/\!/$平面 $BB_1C_1C$.

**证明** 如图 1-28，建立空间直角坐标系 $Dxyz$，根据各已知线段的长度，可求出点 $E$，$F$ 的坐标分别为 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},0\right)$，$\left(0,\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，从而

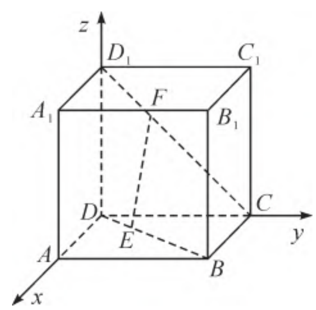


图 1-28

$$\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right).$$

又平面 $BB_1C_1C$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$，而

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1\times0+0\times\frac{2}{3}=0,$$

所以 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{EF}$.

又 $EF\not\subset$平面 $BB_1C_1C$，所以 $EF/\!/$平面 $BB_1C_1C$.

## 练习

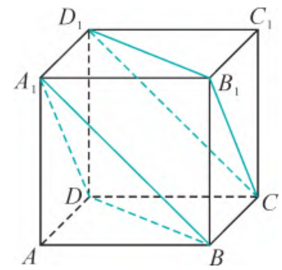
**1.** 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别是直线 $a$，$b$ 的方向向量. 试判断下列各组中的两条直线 $a$，$b$ 是否平行：

（1）$\boldsymbol{a}=(1,\ -3,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,\ 2,\ 1)$；

（2）$\boldsymbol{a}=(-1,\ 1,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$.

**2.** 求证：以 $A(4,\ 1,\ 9)$，$B(10,\ -1,\ 6)$，$C(2,\ 4,\ 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

**3.** 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，求证：平面 $A_1BD$∥平面 $CB_1D_1$.



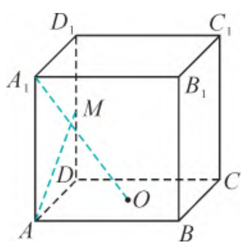

（第 3 题图）

## 习题 1.4.2

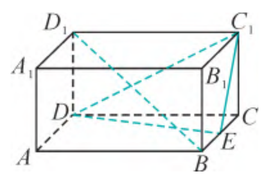
**1.** 求证：如果一个平面内的两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

**2.** 已知三点 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 2)$，求满足下列条件的点 $D$ 的坐标：$DB$∥$AC$，$DC$∥$AB$.

**3.** 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $M$ 是棱 $DD_1$ 的中点，点 $O$ 为正方形 $ABCD$ 的中心. 求证：$OA_1\perp AM$.




（第 3 题图）




（第 4 题图）

**4.** 如图，已知正四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的侧棱长为 1，底面边长为 2，点 $E$ 是棱 $BC$ 的中点. 求证：$BD_1$∥平面 $C_1DE$.

# 1.4.3 空间向量在计算角度问题中的应用

**1. 空间两条直线所成的角**

设空间两条直线 $a$ 与 $b$ 所成的角为 $\theta$，$\theta\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别为两直线 $a$，$b$ 的一个方向向量，则

当 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$时，$\theta=\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$；

当 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$时，$\theta=\pi-\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$.

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$，那么

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}},$$

于是

$$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

**例 1** 如图 1-29，已知二面角 $\alpha$-$l$-$\beta$ 为 120°，$A$，$B\in l$，$AC\subset\alpha$，$AC\perp l$，$BD\subset\beta$，$BD\perp l$，$AB=6$，$AC=2$，$BD=4$. 求直线 $CD$ 与直线 $AB$ 所成角的余弦值.

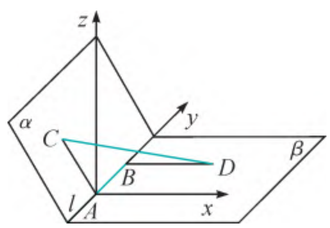


图 1-29

**解** 如图 1-29，建立空间直角坐标系 $Axyz$，则点 $D$ 的坐标为$(4,\ 6,\ 0)$. 由点 $C$ 在平面 $\beta$ 上的射影在 $x$ 轴的负半轴上，二面角 $\alpha$-$l$-$\beta$ 为 120°，$AC=2$，可求得点 $C$ 的坐标为$(-1,\ 0,\ \sqrt{3})$. 从而

$$\overrightarrow{CD}=(5,\ 6,\ -\sqrt{3}).$$

不妨取直线 $AB$ 的一个方向向量 $\boldsymbol{u}=(0,\ 1,\ 0)$，则

$$\cos\langle\boldsymbol{u},\ \overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\boldsymbol{u}||\overrightarrow{CD}|}$$

$$=\frac{0\times5+1\times6+0\times(-\sqrt{3})}{1\times\sqrt{5^2+6^2+(-\sqrt{3})^2}}=\frac{3}{4}.$$

所以 $CD$ 与 $AB$ 所成角的余弦值为$\frac{3}{4}$.

**2. 直线与平面所成的角**

我们已经有了两条直线所成的角的定义，如何确定直线与平面所成的角呢?

先研究平面的斜线与它在平面内的射影所成的角，以及斜线与平面内的任一直线所成的角之间的关系.

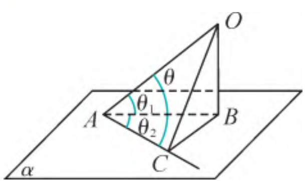


图 1-30

**例2** 设 $AO$ 是平面 $\alpha$ 的斜线(如图 1-30)，点 $A$ 是斜足，$OB$ 垂直于 $\alpha$，点 $B$ 是垂足，则直线 $AB$ 是斜线 $AO$ 在平面 $\alpha$ 内的射影. 设 $AC$ 是 $\alpha$ 内的任一直线，且 $BC \perp AC$，垂足为点 $C$. 又设 $AO$ 与 $AB$ 所成的角为 $\theta_1$，$AB$ 与 $AC$ 所成的角为 $\theta_2$，$AO$ 与 $AC$ 所成的角为 $\theta$. 求证：

$$\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2.$$

**证明** 因为 $OB \perp \alpha$，所以 $OB \perp AC$. 又因为 $BC \perp AC$，由 1.4.2 节的例 1 可知 $OC \perp AC$. 从而$\triangle ABO$，$\triangle ACB$，$\triangle CBO$ 都是直角三角形.

不妨设 $|AO|$ 为单位长度，则

$$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AO}|\cos\theta_1=\cos\theta_1,$$

$$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta_2=\cos\theta_1\cos\theta_2,$$

$$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AO}|\cos\theta=\cos\theta,$$

所以

$$\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2.$$

在例 2 中，由于 $0<\cos\theta_2\leqslant 1$，所以 $\cos\theta\leqslant\cos\theta_1$，从而 $\theta\geqslant\theta_1$. 这说明，平面的斜线与它在平面内的射影所成的角是这条斜线与这个平面内任一直线所成的角中最小的角.

平面的斜线与它在平面内的射影所成的角叫作**斜线与平面所成的角**(或**斜线与平面的夹角**).

如果直线与平面垂直，那么就说直线与平面所成的角是

$90^\circ$；如果直线与平面平行或在平面内，那么就说直线与平面所成的角是 $0^\circ$.

我们再用向量作为工具来研究求直线与平面所成角的大小的方法.

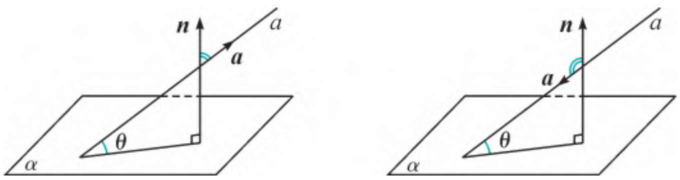



图 1-31

如图 1-31，设 $\boldsymbol{n}$ 是平面 $\alpha$ 的一个法向量，$\boldsymbol{a}$ 是直线 $a$ 的一个方向向量，直线 $a$ 与平面 $\alpha$ 所成的角为 $\theta$，$\theta\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}\rangle$，$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}\rangle\in[0,\ \pi]$.

可以发现 $\theta$ 与 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}\rangle$ 的关系是：

当 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}\rangle\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}\rangle$；

当 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}\rangle\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$ 时，$\theta=\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}\rangle-\dfrac{\pi}{2}$.

于是

$$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{n}|}.$$

特别地，当 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}\rangle=0$ 或 $\pi$ 时，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$a\perp\alpha$；当 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\theta=0$，$a/\!/\alpha$ 或 $a\subset\alpha$.

**例3** 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$BC=3$，$BB_1=2$. 求直线 $A_1B$ 与平面 $A_1B_1CD$ 所成角的正弦值.

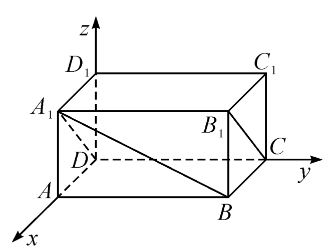



图 1-32

**解** 如图 1-32，以点 $D$ 为原点，建立空间直角坐标系 $Dxyz$，那么点 $A_1$，$B$，$D$，$C$ 的坐标分别为 $(3,\ 0,\ 2)$，$(3,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，从而

$\overrightarrow{A_1B}=(0,4,-2)$，$\overrightarrow{DA_1}=(3,0,2)$，$\overrightarrow{DC}=(0,4,0)$.

设平面 $A_1B_1CD$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(u,\ v,\ w)$，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{DA_1}\cdot \boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DC}\cdot \boldsymbol{n}=0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}3u+2w=0,\\ 4v=0.\end{cases} \qquad ①$$

不妨取 $u=2$，则 $u=2$，$v=0$，$w=-3$ 是方程组①的一个解.

即 $\boldsymbol{n}=(2,\ 0,\ -3)$ 是平面 $A_1B_1CD$ 的一个法向量，所以

$$|\cos\langle\overrightarrow{A_1B},\ \boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{A_1B}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{A_1B}||\boldsymbol{n}|}$$

$$=\frac{|0\times2+4\times0+(-2)\times(-3)|}{\sqrt{0^2+4^2+(-2)^2}\sqrt{2^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{3\sqrt{65}}{65},$$

所以 $A_1B$ 和平面 $A_1B_1CD$ 所成角的正弦值为$\frac{3\sqrt{65}}{65}$.

### 3. 二面角

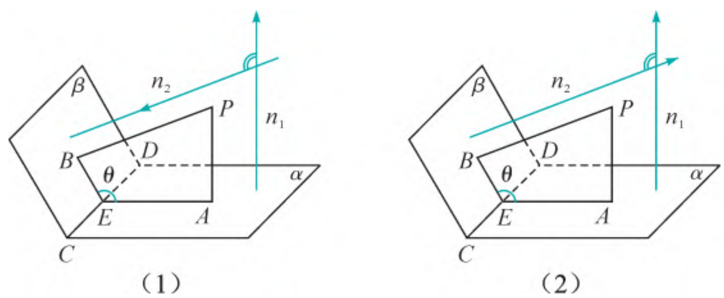



图 1-33

如图 1-33，若 $PA\perp\alpha$ 于 $A$，$PB\perp\beta$ 于 $B$，则平面 $PAB\perp CD$. 设平面 $PAB$ 交 $CD$ 于点 $E$，连接 $EA$，$EB$，则 $\angle AEB$ 为二面角 $\alpha$-$CD$-$\beta$ 的平面角. 设$\angle AEB=\theta$，显然 $\theta+\angle APB=\pi$.

设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别为半平面 $\alpha$，$\beta$ 的一个法向量，不妨设它们交于二面角 $\alpha$-$CD$-$\beta$ 内一点. 当它们中的一个指向对应的平面，而另一个不指向对应的平面时（如图 3-33（1）），$\theta=\langle\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle$；当它们都指向或都不指向对应的平面时（如图 1-33（2）），$\theta=\pi-\langle\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle$.

这样，求二面角可以转化为求这个二面角的两个半平面的法向量的夹角或夹角的补角.

**例 4** 如图 1-34，四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的底面是直角梯形，$AD/\!/BC$，$\angle ABC=90^\circ$，$SA\perp$平面 $ABCD$，$SA=AB=BC=1$，$AD=\frac{1}{2}$. 求平面 $SCD$ 与平面 $SBA$ 所成的锐二面角的余弦值.

二面角的大小可用它的平面角的大小来度量，平面角是锐角、直角、钝角的二面角分别称为锐二面角、直二面角、钝二面角.

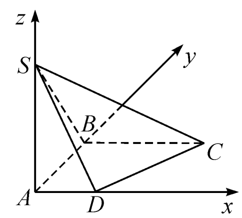


图 1-34

**解** 如图 1-34，以点 $A$ 为坐标原点，建立空间直角坐标系 $Axyz$，则点 $S$，$D$，$C$ 的坐标分别为 $(0, 0, 1)$，$\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$，$(1, 1, 0)$，从而

$$\overrightarrow{SD}=\left(\frac{1}{2}, 0, -1\right), \overrightarrow{DC}=\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right).$$

由题意知，平面 $SBA$ 的一个法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right).$$

设平面 $SCD$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(u, v, w)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{SD}=0,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}\frac{1}{2}u+v=0,\\ \frac{1}{2}u-w=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}v=-\frac{1}{2}u,\\ w=\frac{1}{2}u.\end{cases}$

不妨取 $u=1$，则 $\boldsymbol{n}_2=\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

因此，

$$\cos\langle\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times1+0\times\left(-\frac{1}{2}\right)+0\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

所以，平面 $SCD$ 与平面 $SBA$ 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

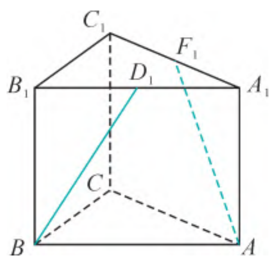
## 练习

**1.** 设 $\boldsymbol{a}=(-2, -1, 3)$，$\boldsymbol{b}=(1, -3, 2)$ 分别是直线 $a$，$b$ 的方向向量．求直线 $a$ 与 $b$ 所成角的大小．

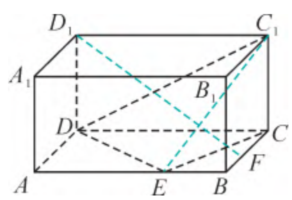
**2.** 如图，在直三棱柱 $A_1B_1C_1\text{-}ABC$ 中，$\angle BCA=90^\circ$．点 $D_1$，$F_1$ 分别是 $A_1B_1$，$A_1C_1$ 的中点，并且 $BC=AC=CC_1$．求：

(1) 直线 $BD_1$ 与 $AF_1$ 所成角的余弦值；

(2) 直线 $BD_1$ 与平面 $AA_1C_1C$ 所成角的正弦值．



（第 2 题图）



（第 3 题图）

**3.** 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AB=4$，$AD=3$，$AA_1=2$．点 $E$，$F$ 分别是线段 $AB$，$BC$ 上的点，且 $EB=FB=1$．求：

(1) 直线 $EC_1$ 与 $FD_1$ 所成的角；

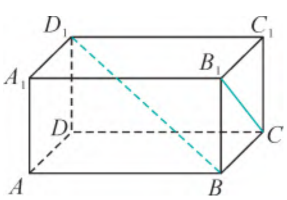
(2) 二面角 $C\text{-}DE\text{-}C_1$ 的大小．

## 习题 1.4.3

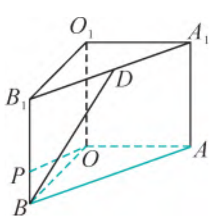
**1.** 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2$，$AB=3$，$AD=a$．

(1) 求异面直线 $B_1C$ 与 $BD_1$ 所成的角；

(2) 当 $a$ 为何值时，$B_1C\perp BD_1$？



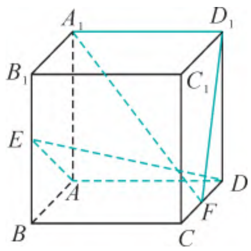
（第 1 题图）



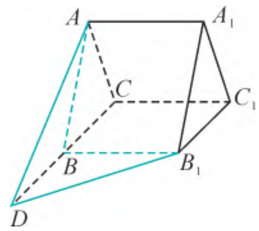
（第 2 题图）

**2.** 如图，在直三棱柱 $ABO\text{-}A_1B_1O_1$ 中，$OO_1=4$，$OA=4$，$OB=3$，$\angle AOB=90^\circ$．点 $D$ 是线段 $A_1B_1$ 的中点，点 $P$ 是侧棱 $BB_1$ 上的一点．若 $OP\perp BD$，求 $OP$ 与平面 $AOB$ 所成角的大小．

3. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $E$，$F$ 分别是 $BB_1$，$CD$ 的中点. 求证：平面 $AED \perp$ 平面 $A_1FD_1$.




（第 3 题图）




（第 4 题图）

4. 如图，正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的底面边长为 3，侧棱 $AA_1=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，点 $D$ 是 $CB$ 延长线上一点，且 $BD=BC$. 求二面角 $B_1\text{-}AD\text{-}B$ 的大小.

## 阅读与讨论

### 空间向量在求距离问题中的应用

前面我们用空间向量作为工具判定直线、平面的位置关系，用空间向量的方法求空间的角，现在我们考虑用向量方法解决有关空间距离的问题.

若点 $P$ 是平面 $\alpha$ 外一点，如何求点 $P$ 到平面 $\alpha$ 的距离 $d$ 呢？

如图 1，在平面 $\alpha$ 上任取一点 $A$. 设 $\boldsymbol{n}$ 为平面 $\alpha$ 的一个法向量，则 $\overrightarrow{AP}$ 到平面 $\alpha$ 的单位法向量 $\boldsymbol{n}_0$ 的投影向量的长度即为所求距离，所以

$$d=|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}_0|=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}. \quad ①$$

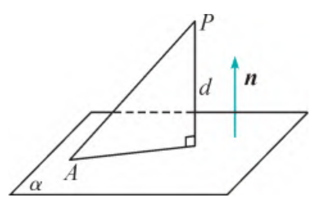



图 1

为了说明这种方法，我们看如下问题.

如图 2，已知 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，点 $E$，$F$ 分别是 $AB$，$AD$ 的中点，$GC$ 垂直于 $ABCD$ 所在的平面，且 $GC=2$，求点 $B$ 到平面 $EFG$ 的距离.

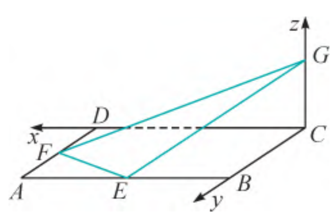



图 2

建立空间直角坐标系 $Cxyz$，可得有关点的坐标为 $E(2,4,0)$，$F(4,2,0)$，$G(0,0,2)$，$B(0,4,0)$.

从而

$$\overrightarrow{EF}=(2,\ -2,\ 0),$$
$$\overrightarrow{EG}=(-2,\ -4,\ 2),$$
$$\overrightarrow{EB}=(-2,\ 0,\ 0).$$

设平面 $EFG$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(u,\ v,\ w)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EG}=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u-2v=0,\\ -2u-4v+2w=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=u,\\ w=3u.\end{cases}$$

不妨取 $u=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,\ 1,\ 3)$.

因为点 $E$ 是平面 $EFG$ 上一点，由公式①知点 $B$ 到平面 $EFG$ 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{EB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|(-2)\times1+0\times1+0\times3|}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}}=\frac{2\sqrt{11}}{11}.$$

在上述问题中，可以证明直线 $BD$//平面 $EFG$. 如果要求直线 $BD$ 到平面 $EFG$ 的距离，只要在直线 $BD$ 上任取一点 $M$，点 $M$ 到平面 $EFG$ 的距离就是直线 $BD$ 到平面 $EFG$ 的距离. 当然，我们也可以将在直线 $BD$ 上任取的一点取为点 $B$，因此直线 $BD$ 到平面 $EFG$ 的距离也为 $\frac{2\sqrt{11}}{11}$.

一般地，对于直线到平面的距离、平行平面之间的距离，我们可以通过转换，化为点到平面的距离来求解. 并且用向量方法可以得到求解距离问题的程序化方法，即：

第一步：确定法向量 $\boldsymbol{n}$；

第二步：选择参考向量 $\overrightarrow{AB}$；

第三步：确定参考向量 $\overrightarrow{AB}$ 到法向量 $\boldsymbol{n}$ 的投影向量；

第四步：取投影向量的长度，即得所求的距离.

**讨论题**

已知一直线与一平面平行，你能给出这条直线与这个平面的距离的一个合理的定义，并说明求这个距离的方法吗？

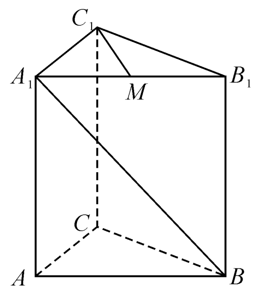
# 复习题

## A 组

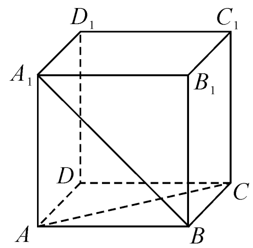
**1.** 已知点 $A(3,3,1)$，$B(1,0,5)$．求到 $A$，$B$ 两点距离相等的点 $P(x,y,z)$ 的坐标 $x$，$y$，$z$ 满足的条件．

**2.** 已知点 $A(1,5,-2)$，$B(2,4,4)$，$C(a,3,b+2)$．如果 $A$，$B$，$C$ 三点共线，求 $a$，$b$ 的值．

**3.** 如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$CA=CB=1$，$\angle BCA=90^\circ$，棱 $AA_1=2$，点 $M$ 是 $A_1B_1$ 的中点．求证：$A_1B\perp C_1M$．



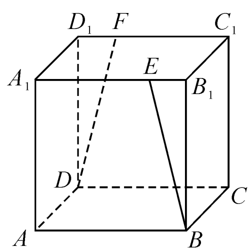
（第 3 题图）



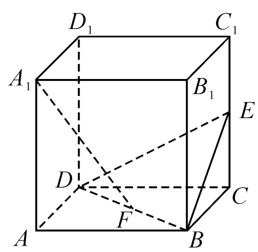
（第 4 题图）

**4.** 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，求异面直线 $BA_1$ 与 $AC$ 所成角的大小．

**5.** 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $E$，$F$ 分别是棱 $A_1B_1$，$C_1D_1$ 上的点，且 $B_1E=D_1F=\frac{1}{4}A_1B_1$．求 $BE$ 与 $DF$ 所成角的余弦值．



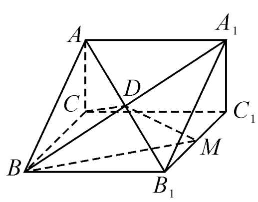
（第 5 题图）



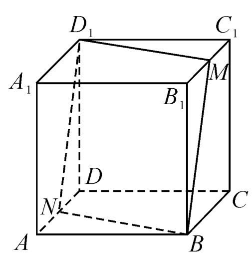
（第 6 题图）

**6.** 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$E$，$F$ 分别是 $CC_1$，$BD$ 的中点．求证：$A_1F\perp$ 面 $BDE$．

**7.** 如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=1$，$CB=\sqrt{2}$，侧棱 $AA_1=1$，侧面 $AA_1B_1B$ 的两条对角线的交点为点 $D$，$B_1C_1$ 的中点为点 $M$．求证：$CD\perp$ 面 $BDM$．



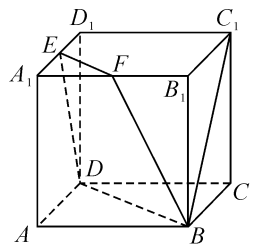
（第 7 题图）



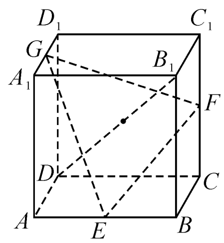
（第 8 题图）

**8.** 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $M$，$N$ 分别是棱 $B_1C_1$，$AD$ 的中点．证明 $B$，$M$，$D_1$，$N$ 四点共面，并求直线 $AD$ 与平面 $BMD_1N$ 所成角的余弦值．

**9.** 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $E$，$F$ 分别是棱 $A_1D_1$，$A_1B_1$ 的中点. 证明 $B$，$F$，$E$，$D$ 四点共面，并求 $BC_1$ 和平面 $EFBD$ 所成角的大小.




（第 9 题图）




（第 10 题图）

**10.** 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $E$，$F$，$G$ 分别是 $AB$，$CC_1$，$D_1A_1$ 的中点，$AB=1$.

（1）求证：$B_1D\perp$平面 $EFG$；

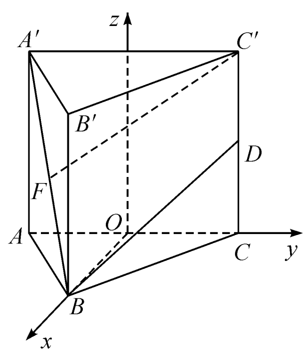
（2）求平面 $EFG$ 与平面 $ABCD$ 所成的锐二面角的大小.

## B 组

**1.** 如图，在底面是正三角形的直三棱柱 $ABC\text{-}A'B'C'$中，点 $D$，$F$ 分别是$CC'$与$A'B$ 的中点. 设 $AA'=AB=2a$. 取 $AC$ 中点为坐标原点 $O$，$OB$ 所在直线为 $x$ 轴，$AC$ 所在直线为 $y$ 轴，建立空间直角坐标系$Oxyz$. 求：

（1）各顶点的坐标及点 $D$，$F$ 的坐标；

（2）$DB$ 和$C'F$ 的长度.




（第 1 题图）

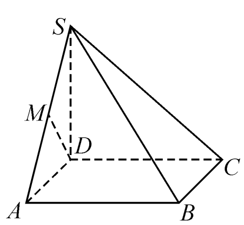
**2.** 求证：如果两条直线垂直于同一个平面，那么这两条直线平行.

**3.** 如图，四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形，$SD\perp$底面 $ABCD$，$SB=\sqrt{3}$.

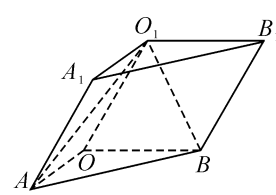
（1）求证：$BC\perp SC$；

（2）设棱 $SA$ 的中点为$M$，求异面直线 $DM$ 与 $SB$ 所成角的大小；

（3）求面 $ASD$ 与面 $BSC$ 所成的锐二面角的大小.



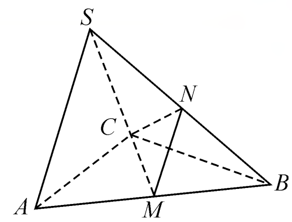

（第 3 题图）




（第 4 题图）

**4.** 如图，在三棱柱 $OAB\text{-}O_1A_1B_1$ 中，平面 $OBB_1O_1\perp$平面 $OAB$. $\angle O_1OB=60^\circ$，$\angle AOB=90^\circ$，且 $OB=OO_1=2$，$OA=\sqrt{3}$. 求二面角 $O_1\text{-}AB\text{-}O$ 的大小.

5. 如图，在三棱锥 $S$-$ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形，平面 $SAC\perp$平面 $ABC$，$SA=SC=2\sqrt{3}$，点 $M$，$N$ 分别为 $AB$，$SB$ 的中点. 求二面角 $N$-$CM$-$B$ 的大小.

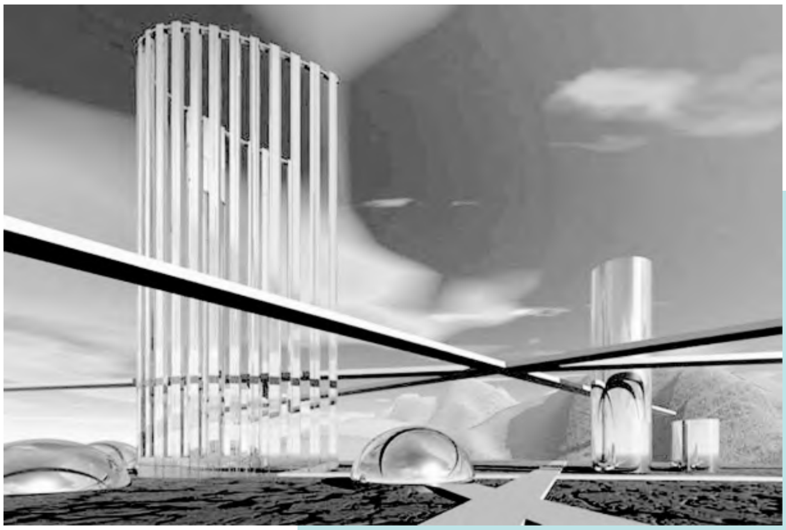


（第 5 题图）

## 思考与实践

空间向量的引入，为研究三维空间中图形的位置关系和度量问题提供了十分有效的工具. 针对这一观点，请你总结自己运用空间向量解决几何问题的经验，并举例说明.

# 第2章 平面解析几何初步



2.1　直线与直线的方程

阅读与讨论：坐标几何史话

2.2　圆与圆的方程

课题学习：数学探究——直线系方程

复习题

思考与实践

在初中阶段学习函数的时候，我们知道：在直角坐标系中描绘图象时，一次函数用直线表示，二次函数用抛物线表示，反比例函数用双曲线表示，可以通过直观地观察函数图象的特征来研究函数的性质. 也就是说，当我们面对代数问题的时候，我们想到了利用几何图形.

反过来，当需要研究直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线等几何图形的性质时，我们可以通过建立平面直角坐标系，得到这些几何图形的方程，将几何问题转化为代数问题来解决，这就是解析几何主要的研究方法——解析法.

本章我们将以直线和圆这两种几何图形为载体，熟悉平面解析几何的一些基本概念，学习并体会用代数方法处理几何问题的数学思想.

# 2.1 直线与直线的方程

## 2.1.1 直线的倾斜角和斜率

我们知道，两点确定一条直线．在实际操作时，还可以用一点和一个角来确定直线．例如，一艘船要从 $A$ 地航行到 $B$ 地，就是以船出发时的位置 $A$ 为参照点，再给定一个角（如东偏北 $30°$）来确定航行方向的．

为了便于研究这个角与直线的关系，我们在平面直角坐标系中给出这个角的定义．

在平面直角坐标系中，对于一条与 $x$ 轴相交的直线，把 $x$ 轴绕着交点按逆时针方向旋转到和直线重合时所得的最小正角 $\alpha$ 叫作直线的**倾斜角**（angle of inclination）．

当直线与 $x$ 轴平行或重合时，规定它的倾斜角为 $0°$．

由定义知，直线的倾斜角 $\alpha$ 的范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$．如图 2-1所示，图中角 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ 分别为对应直线的倾斜角．

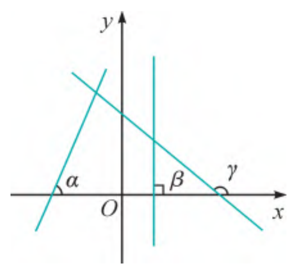



图 2-1

在平面直角坐标系中，对于倾斜角 $\alpha\neq 90°$的直线，把 $\alpha$ 的正切值叫作这条直线的**斜率**（slope），常用小写字母 $k$ 表示，即

$$k=\tan\alpha \quad (\alpha\neq 90°).$$

例如，倾斜角是 $135°$的直线的斜率为

$$k=\tan 135°=\tan(180°-45°)=-\tan 45°=-1.$$

**例1** 如图 2-2 所示，说出图中正三角形 $ABC$ 各边所在直线的倾斜角与斜率.

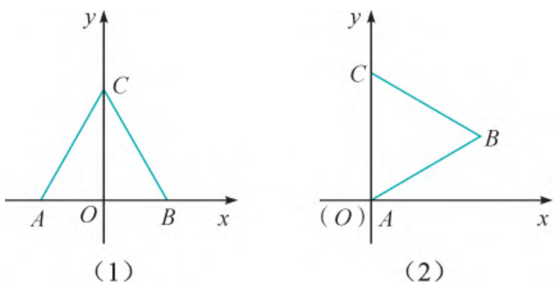


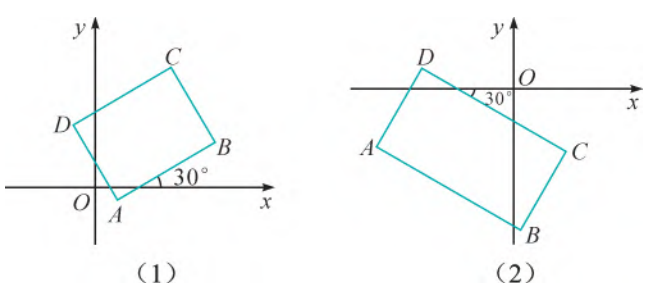

图 2-2

**解** 在图 2-2(1)中，直线 $AB$ 的倾斜角为 $0°$，斜率为 0；直线 $BC$ 的倾斜角为 $120°$，斜率 $k=\tan 120°=\tan(180°-60°)=-\tan 60°=-\sqrt{3}$；直线 $AC$ 的倾斜角为 $60°$，斜率为 $k=\tan 60°=\sqrt{3}$.

在图 2-2(2)中，直线 $AB$ 的倾斜角为 $30°$，斜率为 $k=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$；直线 $BC$ 的倾斜角为 $150°$，斜率 $k=\tan 150°=\tan(180°-30°)=-\tan 30°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$；直线 $AC$ 的倾斜角为 $90°$，斜率不存在.

## 练习

1. 直线 $l_1$ 的倾斜角为 $\alpha_1=60°$，直线 $l_2\perp l_1$，求直线 $l_2$ 的斜率.
2. 矩形 $ABCD$ 如图(1)，(2)，分别求它的各边所在直线的倾斜角和斜率.




(第 2 题图)

我们知道，在直角坐标平面内，如果已知两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，那么直线 $P_1P_2$ 就确定了．当直线 $P_1P_2$ 的倾斜角不等于 $90^\circ$（即 $x_1 \neq x_2$）时，这条直线的斜率也是确定的．那么，如何用直线上两点的坐标来表示直线的斜率呢？

设直线 $P_1P_2$ 的倾斜角为 $\alpha$，斜率为 $k$（如图 2-3）．

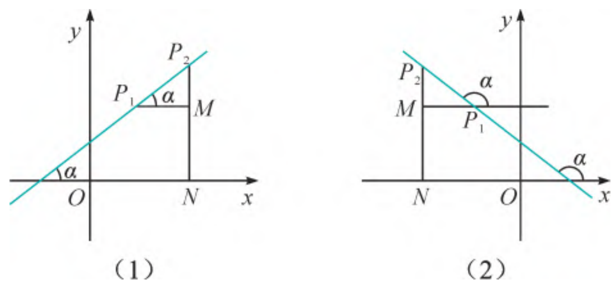



图 2-3

过点 $P_2$ 作直线 $P_2N \perp x$ 轴，垂足为 $N$；再过点 $P_1$ 作 $P_1M \perp P_2N$，垂足为 $M$，则点 $M$ 的坐标为 $(x_2, y_1)$．

若 $\alpha$ 为锐角（如图 2-3（1）），此时

$$|P_1M| = x_2 - x_1,\quad |P_2M| = y_2 - y_1.$$

线段 $AB$ 的长度记作 $|AB|$．

所以

$$k = \tan\alpha = \frac{|P_2M|}{|P_1M|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

若 $\alpha$ 为钝角（如图 2-3（2）），此时

$$|P_1M| = x_1 - x_2,\quad |P_2M| = y_2 - y_1.$$

而 $\tan(180^\circ - \alpha) = \dfrac{|P_2M|}{|P_1M|} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$，所以

$$k = \tan\alpha = -\tan(180^\circ - \alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

若 $\alpha = 0^\circ$，则 $y_1 = y_2$，这时仍有 $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 成立．

斜率 $k$ 与直线上选取的两点 $P_1$，$P_2$ 的位置有关吗？为什么？

综上所述，我们得到经过两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ $(x_1 \neq x_2)$ 的直线的**斜率公式**

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

**例2** 求经过 $A(\sqrt{3}, -\sqrt{2})$，$B(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ 两点的直线的斜率和倾斜角.

**解** 这条直线的斜率为

$$k=\frac{-\sqrt{3}-(-\sqrt{2})}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=1.$$

设这条直线的倾斜角为 $\alpha$，则

$$\tan\alpha=1.$$

又因为 $0^\circ\leqslant\alpha<180^\circ$，所以 $\alpha=45^\circ$，即这条直线的倾斜角为 $45^\circ$.

**例3** 如图 2-4 所示，在足球电子游戏中，以球门线 $OA$ 所在直线为 $x$ 轴，端点 $O$ 为坐标原点建立平面直角坐标系. 已知球门宽 $|OA|=2$，一机器人运球至点 $B(4, 2)$ 处，现欲操纵该机器人在该处起脚射出地滚球，球的运行路线与 $OA$ 所成的角为 $\alpha$，当 $\alpha$ 在什么范围时，才可以把球射入门内(精确到 $1^\circ$)?

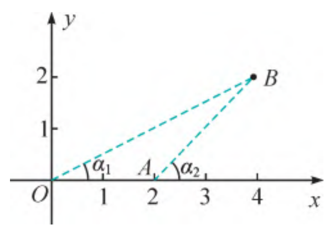


图 2-4

**解** 设直线 $OB$，$AB$ 的倾斜角分别为 $\alpha_1$，$\alpha_2$.

因为 $k_{OB}=\frac{2-0}{4-0}=0.5$，$k_{AB}=\frac{2-0}{4-2}=1$，所以

$$\alpha_1\approx27^\circ,\quad \alpha_2=45^\circ.$$

因此，当 $27^\circ<\alpha<45^\circ$ 时，才可以把球射入门内.

## 练习

**1.** 求经过下列两个点的直线的斜率和倾斜角：

(1) $A(3, 2)$，$B(3, 5)$；

(2) $C(0, 0)$，$D(-2, 2)$；

(3) $E(1, 2)$，$F(3, 6)$；

(4) $G(-2, 1)$，$H(3, -2)$.

**2.** 已知 $a$，$b$，$c$ 是两两不等的实数，分别求经过以下两个点的直线的倾斜角：

(1) $A(a, c)$，$B(b, c)$；

(2) $C(a, b)$，$D(a, c)$；

(3) $P(b, b+c)$，$Q(a, c+a)$.

## 习题 2.1.1

1. 已知直线的倾斜角，求直线的斜率：

 (1) $\alpha=60°$；

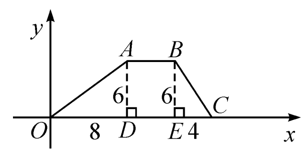
 (2) $\alpha=150°$.

2. 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点是 $A(2,\ 3)$，$B(1,\ -1)$，$C(-1,\ -2)$，$D(-2,\ 2)$，求四条边所在直线的斜率和倾斜角.

3. 已知点 $A(2,\ 4)$，$B(m,\ -3)$，$C(4,\ 2)$，且这三点共线，求 $m$ 的值.

4. 已知点 $A(-2,\ 3)$，$B(3,\ 2)$，$P(0,\ -2)$，过点 $P$ 的直线 $l$ 与线段 $AB$ 有公共点，且不与 $y$ 轴重合. 求直线 $l$ 的斜率 $k$ 的取值范围.

5. 如图是一个堤坝的横截面示意图. 根据图中尺寸，求 $OA$，$AB$，$BC$ 所在直线的斜率.




（第 5 题图）

## 2.1.2 直线的方程

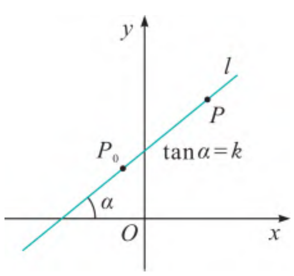



图 2-5

已知直线 $l$ 经过点 $P_0(x_0,\ y_0)$，且斜率为 $k$（如图 2-5），下面我们来探求直线 $l$ 的方程.

设点 $P(x,\ y)$ 是直线 $l$ 上不同于 $P_0$ 的任一点，由斜率公式，得 $k=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$，可化为

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad ①$$

显然，点 $P_0$ 的坐标也满足这个方程，所以直线 $l$ 上的每个点的坐标都是方程①的解.

反过来，可以验证以方程①的解为坐标的点都在直线 $l$ 上.

所以，方程①就是经过点 $P_0$ 且斜率为 $k$ 的直线 $l$ 的方程.

方程①是由直线上一定点和直线的斜率确定的，我们将方程①叫作直线的**点斜式方程**.

当直线 $l$ 的倾斜角为 $0°$时，$k=0$（如图 2-6），这时直线 $l$ 的方程是

$$y=y_0,$$

它是方程①的特殊情形.

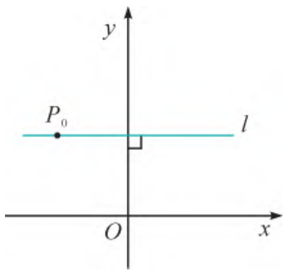


图 2-6

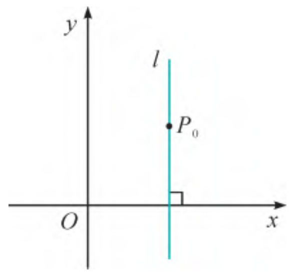


图 2-7

当直线 $l$ 的倾斜角为 $90°$时，其斜率不存在. 这时直线 $l$ 与 $y$ 轴平行或重合，它的方程不能用点斜式方程表示. 因为直线 $l$ 上每一点的横坐标相等且等于 $x_0$（如图 2-7），所以它的方程是

$$x=x_0.$$

**例 1** 已知直线 $l$ 的斜率是 $k$，它与 $y$ 轴的交点是点 $P(0, b)$，求直线 $l$ 的方程.

**解** 由直线的点斜式方程，得所求直线的方程是

$$y-b=k(x-0),$$

即

$$y=kx+b. \qquad ②$$

我们称 $b$ 为直线 $l$ 在 $y$ 轴上的**截距**（intercept）. 若直线与 $x$ 轴相交于点 $(a, 0)$，则称 $a$ 为直线在 $x$ 轴上的截距.

截距与距离有何区别？

方程②是由直线的斜率和它在 $y$ 轴上的截距确定的，叫作直线的**斜截式方程**.

由此，你能说出一次函数 $y=kx+b$ 中 $k$，$b$ 的几何意义吗？

**例 2** 求倾斜角是直线 $y=-\sqrt{3}x+1$ 的倾斜角的 $\frac{1}{4}$，且分别满足下列条件的直线的方程：

(1) 经过点 $A(\sqrt{3}, -1)$；

(2) 在 $y$ 轴上的截距是 $-5$.

**解** 直线 $y=-\sqrt{3}x+1$ 的斜率是 $-\sqrt{3}$，倾斜角为 $120°$，故所求直线的倾斜角为 $120°\times\frac{1}{4}=30°$，其斜率 $k=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 由直线的点斜式方程，得所求直线的方程为

$$y-(-1)=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3}),$$

即 $$x-\sqrt{3}y-2\sqrt{3}=0.$$

(2) 由直线的斜截式方程，得所求直线的方程为

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-5,$$

即 $$x-\sqrt{3}y-5\sqrt{3}=0.$$

## 练习

**1.** 写出下列直线的点斜式方程，并画出图形：

(1) 经过点 $C(-\sqrt{2}, 2)$，倾斜角是 $60°$；

(2) 经过点 $D(0, 3)$，倾斜角是 $0°$；

(3) 经过点 $E(4, -2)$，倾斜角是 $150°$；

(4) 经过点 $A(-2, 5)$，斜率是 4.

**2.** 填空：

(1) 已知直线的点斜式方程是 $y-2=x-1$，直线的斜率是________，倾斜角是________；

(2) 已知直线的点斜式方程是 $y+2=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$，直线的斜率是________，倾斜角是________；

(3) 已知直线的方程是 $y=-2x-2$，直线的斜率是________，在 $y$ 轴上的截距是________；

(4) 已知直线的方程是 $y=-2$，直线的斜率是________，在 $y$ 轴上的截距是________；

(5) 已知直线的方程是 $x=-2$，直线的倾斜角是________.

**3.** 求满足下列条件的直线的方程：

(1) 经过点 $P(0, -2)$，斜率 $k=-2$；

(2) 经过点 $P(-2, 0)$，斜率 $k=2$.

已知直线 $l$ 经过两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，下面我们来探求直线 $l$ 的方程.

当 $x_1=x_2$ 时，直线 $l$ 的方程为 $x=x_1$；

当 $y_1=y_2$ 时，直线 $l$ 的方程为 $y=y_1$；

当 $x_1\neq x_2$ 且 $y_1\neq y_2$ 时，直线 $l$ 的斜率 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. 由直线的点斜式方程，得直线 $l$ 的方程为

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

这个方程可以写成

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad ③$$

方程③是由直线上两点确定的，叫作直线的**两点式方程**.

应用直线的两点式方程写直线的方程时要注意 $x_1$，$x_2$，$y_1$，$y_2$ 在各个位置上的顺序，而且要注意两点式方程满足的条件：$x_1\neq x_2$ 且 $y_1\neq y_2$.

**例3** 已知直线 $l$ 在 $x$ 轴和 $y$ 轴上的截距分别为 $a$ 和 $b$ $(a\neq 0, b\neq 0)$，求直线 $l$ 的方程.

**解** 因为直线 $l$ 在 $x$ 轴和 $y$ 轴上的截距分别为 $a$ 和 $b$，所以直线 $l$ 经过点 $(a, 0)$，$(0, b)$. 代入直线的两点式方程，得

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a},$$

即

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad ④$$

方程④叫作直线的**截距式方程**，通过它可以非常方便地画出方程所表示的直线.

**例4** 已知三角形的顶点为 $A(-5, 0)$，$B(3, -3)$，$C(0, 2)$，求这个三角形三边所在直线的方程.

**解** 直线 $AB$ 过点 $A(-5, 0)$，$B(3, -3)$，由直线的两点式方程得

$$\frac{y-0}{-3-0}=\frac{x-(-5)}{3-(-5)},$$

整理得

$$3x+8y+15=0,$$

这就是直线 $AB$ 的方程.

直线 $BC$ 在 $y$ 轴上的截距是 2，斜率是

$$k=\frac{2-(-3)}{0-3}=-\frac{5}{3}.$$

由直线的斜截式方程，得

$$y=-\frac{5}{3}x+2,$$

整理得

$$5x+3y-6=0,$$

这就是直线 $BC$ 的方程.

直线 $AC$ 过 $A(-5, 0)$，$C(0, 2)$ 两点，由直线的截距式方程得

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{2}=1,$$

整理得

$$2x-5y+10=0.$$

这就是直线 $AC$ 的方程.

**练习**

**1.** 求过下列两点的直线的两点式方程，再化成斜截式方程：

(1) $P_1(2, 1)$，$P_2(0, -3)$；

(2) $A(-4, -5)$，$B(0, 0)$.

**2.** 求过点 $A(5, 7)$ 和 $B(1, 3)$ 的直线的方程．又知 $P(a, 12)$ 在直线 $AB$ 上，求 $a$ 的值.

**3.** 根据下列条件求直线的方程，并画出图形：

(1) 在 $x$ 轴上的截距是 2，在 $y$ 轴上的截距是 3；

(2) 在 $x$ 轴上的截距是 $-5$，在 $y$ 轴上的截距是 6.

前面我们研究了直线方程的几种特殊形式，知道它们都是关于 $x$，$y$ 的一个二元一次方程．那么，是否任何一条直线 $l$ 都能用一个二元一次方程来表示呢？

(1) 当直线 $l$ 的倾斜角 $\alpha\neq 90^\circ$ 时，它们都有斜率，因此直线的方程可写成 $y=kx+b$，它是关于 $x$，$y$ 的一个二元一次方程；

(2) 当 $\alpha=90°$时，直线的方程可写成 $x=x_0$，它可看作是关于 $x$，$y$ 的一个二元一次方程，其中 $y$ 的系数为 0.

这样，对于平面直角坐标系中的任何一条直线，都能用一个关于 $x$，$y$ 的二元一次方程来表示.

反过来，关于 $x$，$y$ 的一个二元一次方程 $Ax+By+C=0$（$A$，$B$ 不同时为 0）是否一定表示一条直线呢?

(1) 当 $B\neq 0$ 时，$Ax+By+C=0$ 可化为 $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$，它表示斜率为$-\frac{A}{B}$、在 $y$ 轴上的截距为$-\frac{C}{B}$的直线；

(2) 当 $B=0$ 时，因为 $A$，$B$ 不同时为 0，有 $A\neq 0$，所以 $Ax+By+C=0$ 可化为 $x=-\frac{C}{A}$，它表示一条垂直于 $x$ 轴的直线.

这样，关于 $x$，$y$ 的二元一次方程都表示一条直线.

我们把方程

$$Ax+By+C=0$$

（其中 $A$，$B$ 不同时为 0）叫作直线的**一般式方程.**

直线方程的几种特殊形式与一般式可以互化. 在求直线方程时，要适当地选择某一形式进行求解.

试归纳出直线方程的每一种形式的适用范围.

**例5** 已知直线经过点 $A(6，-4)$，斜率为$-\frac{4}{3}$，求直线的点斜式、斜截式和一般式方程，并画出图形.

**解** 经过点 $A(6，-4)$并且斜率为$-\frac{4}{3}$的直线的点斜式方程是

$$y+4=-\frac{4}{3}(x-6).$$

化成斜截式方程，得

$$y=-\frac{4}{3}x+4.$$

化成一般式方程，得

$$4x+3y-12=0.$$

这条直线的图形如图 2-8 所示.

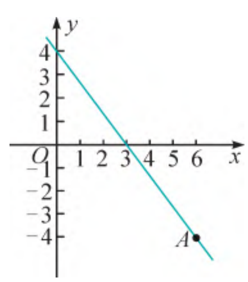


图 2-8

## 练习

**1.** 根据下列条件写出直线的方程，并化成一般式：

(1) 斜率是$-\frac{1}{2}$，经过点 $A(8, -2)$；

(2) 经过点 $B(4, 2)$，平行于 $x$ 轴；

(3) 经过点 $C(-1, -1)$，平行于 $y$ 轴；

(4) 经过两点 $P_1(3, -2)$，$P_2(5, -4)$；

(5) 在 $x$ 轴和 $y$ 轴上的截距分别是$\frac{3}{2}$，$-3$.

**2.** (1) 若点 $P(x_0, y_0)$在直线 $l$：$Ax+By+C=0$ 上，则直线 $l$ 的方程一定可以表示为(　　).

(A) $A(x+x_0)+B(y+y_0)+C=0$　　(B) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C=0$

(C) $A(x+x_0)+B(y+y_0)=0$　　(D) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$

(2) 若 $AC<0$，$BC<0$，那么直线 $Ax+By+C=0$ 不通过(　　).

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

**3.** 直线 $l$ 的方程是 $Ax+By+C=0$，根据下列各位置特征，写出 $A$，$B$，$C$ 应满足的关系：

(1) 与两个坐标轴都相交；　　(2) 过原点；

(3) 只与 $x$ 轴相交；　　(4) 是 $y$ 轴所在的直线.

## 习题 2.1.2

**1.** 根据下列条件写出直线的方程：

(1) 斜率是$\frac{\sqrt{3}}{2}$，经过点 $A(8, -2)$；

(2) 斜率是$-4$，在 $y$ 轴上的截距为 7；

(3) 过点 $B(-2, 0)$，且与 $x$ 轴垂直；

(4) 在 $y$ 轴上的截距是 2，且与 $x$ 轴平行；

(5) 经过两点 $A(-1, 8)$，$B(4, -2)$；

(6) 在 $y$ 轴上的截距是$-6$，且与 $y$ 轴成 $45^\circ$角.

**2.** 已知直线 $l$：$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$，$l$ 绕点$(2, 0)$按顺时针方向旋转 $30^\circ$得到直线 $l'$，求直线 $l'$的方程.

**3.** 已知$\triangle ABC$ 的顶点是 $A(0, 5)$，$B(1, -2)$，$C(-6, 4)$，求三边所在直线的方程.

**4.** 求过点 $P(3, 2)$并且在两坐标轴上的截距相等的直线的方程.

**5.** 已知正方形的边长为 4，其中心在坐标原点，对角线在坐标轴上，求正方形各边及对称轴所在直线的方程.

**6.** 求证：$A(1, 3)$，$B(5, 7)$，$C(10, 12)$三点在同一直线上.

**7.** 已知直线 $l$ 与两个坐标轴围成一个面积为 18 的等腰三角形，求此直线的方程.

## 2.1.3 两条直线的位置关系

在平面直角坐标系中，给定两条直线 $l_1$，$l_2$，能否用直线的方程来判断它们的位置关系呢?

我们先来研究两条直线平行的情形.

我们知道，斜率相等的两条直线的倾斜角也相等，它们相互平行；反之，两条直线平行时，它们的倾斜角相等，若倾斜角不为 $90°$，则它们的斜率相等.

一般地，有以下结论：

(1) 如果两条直线 $l_1$ 与 $l_2$ 的斜率都存在，设它们的方程分别为

$$l_1：y=k_1x+b_1,$$
$$l_2：y=k_2x+b_2.$$

如图 2-9(1)，若 $k_1=k_2$，且 $b_1\neq b_2$，则 $l_1 /\!/ l_2$；反之，若 $l_1 /\!/ l_2$，则 $k_1=k_2$，且 $b_1\neq b_2$.

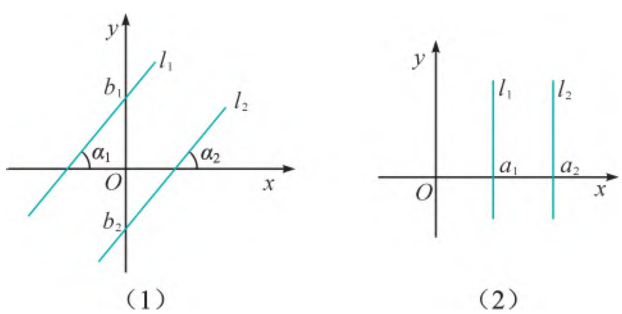



图 2-9

(2) 如果两条直线 $l_1$ 与 $l_2$ 的斜率都不存在，设它们的方程分别为

$$l_1：x=a_1,$$
$$l_2：x=a_2.$$

如图 2-9(2)，有 $l_1\perp x$ 轴，$l_2\perp x$ 轴，当 $a_1\neq a_2$ 时，$l_1 /\!/ l_2$.

**例1** 求过点 $A(1,-4)$ 且与直线 $2x+3y+5=0$ 平行的直线的方程.

**解** 已知直线的斜率是 $-\frac{2}{3}$. 因为所求直线与已知直线平行，所以它的斜率也是 $-\frac{2}{3}$. 因此，所求直线的方程为

$$y+4=-\frac{2}{3}(x-1),$$

即

$$2x+3y+10=0.$$

下面我们研究两条直线垂直的情形.

设两条直线 $l_1$，$l_2$ 的倾斜角分别为 $\alpha_1$，$\alpha_2$ $(\alpha_1, \alpha_2 \neq 90°)$.

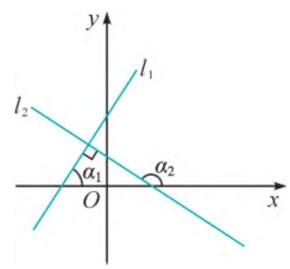


图 2-10

如图 2-10，如果 $l_1 \perp l_2$，这时 $\alpha_1 \neq \alpha_2$. 由三角形任一外角等于其不相邻的两个内角之和，即

$$\alpha_2=90°+\alpha_1,$$

于是可得

$$\tan\alpha_2=\tan(90°+\alpha_1)=-\frac{1}{\tan\alpha_1}.$$

又因为直线 $l_1$，$l_2$ 的斜率分别为 $k_1=\tan\alpha_1$，$k_2=\tan\alpha_2$，所以

$$k_1k_2=-1.$$

由上我们得到，如果两条直线都有斜率，且它们互相垂直，那么它们的斜率之积等于 $-1$；反之，如果它们的斜率之积等于 $-1$，那么它们互相垂直. 即

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1.$$

**例2** 求经过点 $A(2,1)$，且与直线 $2x+y-10=0$ 垂直的直线 $l$ 的方程.

**解** 已知直线 $2x+y-10=0$ 的斜率是 $-2$. 因为直线 $l$ 与已知直线垂直，所以它的斜率是

$$k=-\frac{1}{(-2)}=\frac{1}{2}.$$

因此，所求直线 $l$ 的方程是

$$y-1=\frac{1}{2}(x-2),$$

即 $$x-2y=0.$$

## 练习

1. 判断下列各对直线是否平行或垂直：
   (1) $y=3x+4$ 与 $2y-6x+1=0$；
   (2) $y=x$ 与 $3x+3y-10=0$；
   (3) $3x+4y=5$ 与 $6x-8y=7$；
   (4) $3x+2=0$ 与 $2y-3=0$；
   (5) $x+4=0$ 与 $3-x=0$.
2. 求经过点 $A(2,3)$，且分别适合下列条件的直线的方程：
   (1) 平行于直线 $2x+y-5=0$；
   (2) 垂直于直线 $x-y-2=0$.
3. 讨论下列各对直线是否平行或垂直：
   (1) $l_1$：$Ax+By+C_1=0$ 与 $l_2$：$Ax+By+C_2=0$；
   (2) $l_1$：$Ax+By+C_1=0$ 与 $l_2$：$Bx-Ay+C_2=0$.

设两条直线的方程是

$$l_1：A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2：A_2x+B_2y+C_2=0.$$

如何判断这两条直线是否相交？若相交，交点坐标又该如何确定呢？

如果两条直线相交，由于交点同时在这两条直线上，因此交点的坐标一定是这两个方程的唯一公共解；反过来，如果这两个方程只有一组公共解，那么以这个解为坐标的点必定是这

当 $l_1$ 与 $l_2$ 平行时，方程组的解如何？如果 $l_1$ 与 $l_2$ 表示同一直线呢？

两条直线的交点.

因此，我们有下面的结论：

如果直线 $l_1$ 与 $l_2$ 的方程组成的方程组有唯一解，那么这两条直线相交，交点坐标就是方程组的解；反过来，如果直线 $l_1$ 与 $l_2$ 相交，那么直线 $l_1$ 与 $l_2$ 的方程组成的方程组有唯一解.

**例3** 设两条直线 $l_1$：$x-2y+2=0$ 和 $l_2$：$2x-y-2=0$ 的交点为 $P$，求经过点 $P$ 和点 $Q(-1,\ -2)$ 的直线的方程.

**解** 解方程组

$$\begin{cases} x-2y+2=0, \\ 2x-y-2=0, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases}$$

所以，直线 $l_1$ 和 $l_2$ 的交点 $P$ 的坐标为 $(2,\ 2)$.

由直线的两点式方程，得经过点 $P$ 和点 $Q(-1,\ -2)$ 的直线的方程为

$$\frac{y-(-2)}{2-(-2)}=\frac{x-(-1)}{2-(-1)},$$

即

$$4x-3y-2=0.$$

## 练习

**1.** 判断下列各对直线的位置关系，如果相交，求出交点的坐标：

(1) $l_1$：$2x-y=7$，$l_2$：$4x+2y=1$；

(2) $l_1$：$2x-6y+4=0$，$l_2$：$y=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$；

(3) $l_1$：$(\sqrt{2}-1)x+y=3$，$l_2$：$x+(\sqrt{2}+1)y=2$.

**2.** 已知直线 $ax+by+1=0$ 与直线 $2x+y-a=0$ 相交于点 $M(2,\ -1)$，求 $a$，$b$ 的值.

**3.** 设直线 $2x-y+4=0$ 与 $x-y+5=0$ 的交点为 $P$，求经过点 $P$ 且垂直于直线 $x-2y=0$ 的直线的方程.

## 习题 2.1.3

**1.** 判断下列各对直线是否平行或垂直：

(1) $l_1$：$3x+5y-4=0$，$l_2$：$6x+10y+7=0$；

(2) $l_1$：$y+3=0$，$l_2$：$5y-7=0$；

(3) $l_1$：$2x+3y+4=0$，$l_2$：$3x-2y-1=0$；

(4) $l_1$：$5x-11y+2=0$，$l_2$：$33x+15y-7=0$.

**2.** 根据下列条件，求直线的方程：

(1) 经过点 $A(2,\ -3)$，且与过点 $M(1,\ 2)$，$N(-1,\ -5)$ 的直线平行；

(2) 经过点 $B(3,\ 0)$，且与直线 $2x+y-5=0$ 垂直.

**3.** 已知 $A(-1,\ 3)$，$B(2,\ 4)$，$C(9,\ 0)$，$D(6,\ -1)$，求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

**4.** 已知△$ABC$ 的三个顶点 $A(1,\ 3)$，$B(-1,\ -1)$，$C(2,\ 1)$，求△$ABC$ 的边 $BC$ 上的高所在直线的方程.

**5.** 已知两条直线 $x-my+12=0$ 和 $2x+3y-m=0$ 的交点在 $y$ 轴上，求 $m$ 的值.

**6.** 求满足下列条件的直线的方程：

(1) 经过两条直线 $2x-3y+10=0$ 和 $3x+4y-2=0$ 的交点，且垂直于直线 $3x-2y+4=0$；

(2) 经过两条直线 $2x+y-8=0$ 和 $x+2y+1=0$ 的交点，且平行于直线 $4x-3y-7=0$.

## 2.1.4 平面直角坐标系中的距离公式

在平面直角坐标系中，已知两点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$，于是$|AB|=|\overrightarrow{AB}|$，由此我们得到平面上两点 $A$，$B$ 间的距离公式

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

特别地，原点 $O(0,\ 0)$ 与点 $P(x,\ y)$ 的距离为

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

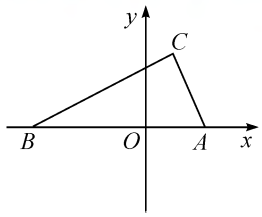


图 2-11

例1 如图 2-11，已知△$ABC$ 的三个顶点是 $A(2, 0)$，$B(-4, 0)$，$C(1, \sqrt{5})$，试判断△$ABC$ 的形状.

**解** 因为

$$|AB|=\sqrt{(-4-2)^2+(0-0)^2}=6,$$

$$|AC|=\sqrt{(1-2)^2+(\sqrt{5}-0)^2}=\sqrt{6},$$

$$|BC|=\sqrt{[1-(-4)]^2+(\sqrt{5}-0)^2}=\sqrt{30},$$

所以有 $|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$，故△$ABC$ 是直角三角形.

例2 求证：平行四边形四条边的平方和等于两条对角线的平方和.

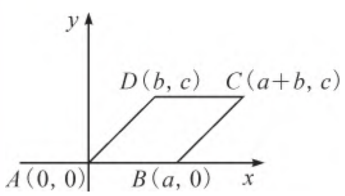


图 2-12

**证明** 以顶点 $A$ 为坐标原点，以 $AB$ 所在直线为 $x$ 轴建立平面直角坐标系，如图 2-12，则 $A(0, 0)$.

设 $B(a, 0)$，$D(b, c)$，由平行四边形的性质得点 $C$ 的坐标为 $(a+b, c)$，则

$$|AB|^2=a^2,\ |CD|^2=a^2,$$

$$|AD|^2=b^2+c^2,\ |BC|^2=b^2+c^2,$$

$$|AC|^2=(a+b)^2+c^2,\ |BD|^2=(b-a)^2+c^2,$$

所以

$$|AB|^2+|CD|^2+|AD|^2+|BC|^2=2(a^2+b^2+c^2),$$

$$|AC|^2+|BD|^2=2(a^2+b^2+c^2).$$

故

$$|AB|^2+|CD|^2+|AD|^2+|BC|^2=|AC|^2+|BD|^2.$$

因此，平行四边形四条边的平方和等于两条对角线的平方和.

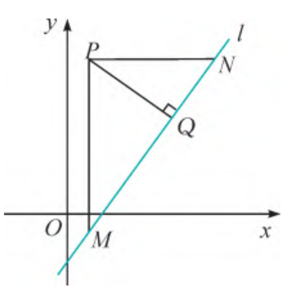


图 2-13

从两点间的距离公式出发，我们可以进一步探讨点到直线的距离公式.

设点 $P(x_0, y_0)$ 及不过该点的直线 $l$：$Ax+By+C=0$. 当直线 $l$ 不垂直于坐标轴时，如图 2-13，过点 $P$ 作 $PQ\perp l$，垂足为 $Q$，则点 $P$ 到直线 $l$ 的距离 $d=|PQ|$.

为求$|PQ|$，过点$P$分别作垂直于$x$轴和$y$轴的直线，交直线$l$于点$M$，$N$，得到直角三角形$MPN$. 下面，我们通过计算这个三角形的面积来求$|PQ|$.

注意到点$M$的横坐标为$x_0$，代入直线$l$的方程解得$y=-\dfrac{Ax_0+C}{B}$，所以点$M$的坐标为$\left(x_0,\ -\dfrac{Ax_0+C}{B}\right)$.

同理，点$N$的坐标为$\left(-\dfrac{By_0+C}{A},\ y_0\right)$. 从而

$$|PM|=\left|y_0+\frac{Ax_0+C}{B}\right|=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{B}\right|,$$

$$|PN|=\left|x_0+\frac{By_0+C}{A}\right|=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{A}\right|,$$

$$\begin{aligned}|MN|&=\sqrt{\left(x_0+\frac{By_0+C}{A}\right)^2+\left(-\frac{Ax_0+C}{B}-y_0\right)^2}\\&=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{AB}\right|\sqrt{A^2+B^2}.\end{aligned}$$

在$\mathrm{Rt}\triangle MPN$中，有$|MN|\cdot|PQ|=|PM|\cdot|PN|$，故

$$d=|PQ|=\frac{|PM|\cdot|PN|}{|MN|}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad ①$$

当$l\perp y$轴时，$A=0$，$B\neq0$，直线$l$的方程为$y=-\dfrac{C}{B}$，因此

$$d=\left|y_0+\frac{C}{B}\right|=\left|\frac{By_0+C}{B}\right|,$$

满足①式.

当$l\perp x$轴时，同样可验证①式成立.

由此可得点$P(x_0,\ y_0)$到直线$l$：$Ax+By+C=0$的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

这里给出了一种推导点到直线的距离公式的方法，你能用其他的方法推导点到直线的距离公式吗？请试一试.

**例3** 求点$P_0(-1,\ 2)$到下列直线的距离：

(1) $2x+y-10=0$；　　(2) $x=4$.

**解** (1) 根据点到直线的距离公式，得

第(2)题也可以用点到直线的距离公式来求.

$$d=\frac{|2\times(-1)+1\times2-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}.$$

(2) 因为直线平行于 $y$ 轴，所以

$$d=|4-(-1)|=5.$$

**例4** 求证：两条平行直线 $l_1$：$Ax+By+C_1=0$ 与 $l_2$：$Ax+By+C_2=0$ 之间的距离为

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

**证明** 若 $A\neq0$，在 $l_1$ 上取一点 $P\left(-\frac{C_1}{A},\ 0\right)$，则两条平行直线之间的距离就等于点 $P$ 到直线 $l_2$ 的距离，即

$$d=\frac{\left|A\cdot\left(-\frac{C_1}{A}\right)+B\cdot0+C_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

若 $A=0$，则 $B\neq0$，这时两条直线的方程分别为

$$l_1:\ y=-\frac{C_1}{B},\quad l_2:\ y=-\frac{C_2}{B},$$

所以它们之间的距离为

$$d=\left|-\frac{C_1}{B}-\left(-\frac{C_2}{B}\right)\right|=\left|\frac{C_1-C_2}{B}\right|=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

因此，结论成立.

## 练习

**1.** 求下列两点间的距离：

(1) $A(-2,\ 3)$，$B(0,\ -1)$；

(2) $C(\sqrt{2}-\sqrt{3},\ 0)$，$D(\sqrt{3}+\sqrt{2},\ -2)$.

**2.** 已知 $P(10,\ 0)$，$B(-2,\ x)$ 两点间的距离为 15，求实数 $x$ 的值.

**3.** 求下列点到直线的距离：

(1) $A(1,\ 0)$，$l$：$x+y-2=0$；

(2) $B(1,\ -2)$，$m$：$4x+3y=0$.

**4.** 求下列两条平行线的距离：

(1) $2x+3y-8=0$，$2x+3y+18=0$；

(2) $6x+8y-7=0$，$3x+4y=0$.

## 习题 2.1.4

1. 已知$\triangle ABC$的三个顶点分别为$A(1,3)$，$B(-5,6)$，$C(-4,-2)$，求$\triangle ABC$的面积.
2. 求两条平行直线$3x-2y-1=0$与$3x-2y+1=0$的距离.
3. 已知点$P$在直线$3x+y-5=0$上，且点$P$到直线$x-y-1=0$的距离等于2，求点$P$的坐标.
4. 已知$\triangle ABC$的顶点$A(2,-3)$，$B(5,1)$，直线$BC$的方程是$x+2y-7=0$，中线$AM$所在直线的方程是$5x-y-13=0$，求$AB$边上的高$CD$所在直线的方程.
5. 在直角坐标平面内，一质点$M$从原点出发以每秒$2\sqrt{2}$个单位长度的速度沿直线$y=x$向上运动；另一质点$N$从点$A(2,0)$出发以每秒2.5个单位长度的速度沿直线$4x-3y-8=0$向上运动. 问：两质点能否相遇？



## 阅读与讨论

### 坐标几何史话

几何学是数学中产生较早的分支，早在公元前3世纪，已经积累并形成了丰富的理论成果，希腊数学家欧几里得的《原本》是一本影响至今的经典著作. 以后两千多年，几何学的研究几乎没有任何突破性的进展.

14—16世纪，欧洲进入文艺复兴时期，人们的思想冲出宗教的束缚，有了很大的解放. 生产的发展向自然科学提出了许多新的课题和新的要求，数学必须为此提供更多的新工具，数学的观点和方法在酝酿着重大变化. 此阶段，相对于几何而言，处于弱势的代数和算术有了长足的发展. 在这种条件下，将代数与几何结合起来的一门新的数学分支——坐标几何（现在称为解析几何）就应运而生了.

法国数学家费马（1601—1665）和笛卡儿（1596—1650）是坐标几何思想和方法的奠基人.

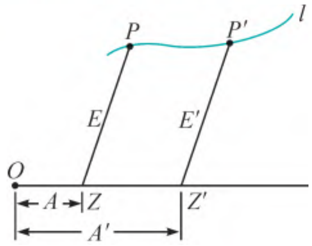


图 1

这里末端指图 1 中的点 $P$，$P'$ 等.

费马考虑任意曲线 $l$，其上的任意点 $P$（如图 1）的位置用 $A$，$E$ 两个字母定出. $A$ 是从定点 $O$ 沿底线到点 $Z$ 的距离，$E$ 是从 $Z$ 沿一定方向的斜线到点 $P$ 的距离. 他指出："只要在表示曲线的方程里出现两个未知量，我们就可以得到一个轨迹. 这两个量之一，其末端就绘出这个轨迹." 费马这里的未知量 $A$，$E$ 实际上就是点的坐标，它类似于现代的斜坐标，但费马没有明确地给出坐标轴，且坐标仅限于非负数.

笛卡儿的坐标几何思想和方法与费马基本相同. 笛卡儿在其名著《方法论》中，主张将几何、代数和逻辑三者的优点结合起来，坐标几何可以说正是这种思想的体现.

笛卡儿最初的出发点是用代数方法解决作图问题，当作出的点不是唯一确定时，就得到了用方程表示轨迹（曲线）的方法. 他还提出一系列新颖而精辟的思想，如：曲线的次数与坐标轴的选择无关，能用解方程组求两曲线的交点，能根据方程给曲线分类，等等.

从方法论的角度看，坐标几何基本思想的提出表示数学思想有了本质意义的进步. 从此把点和曲线这些几何对象与数和方程这些代数对象联系起来，将在历史上长期各自独立发展的两个数学分支结合起来. 这种结合的影响是极其深远的，成果是巨大的，它使原来处于弱势的代数学得到迅速发展，同时几何学也得到了划时代的飞跃.

引入坐标概念以后，他们研究的曲线的范围大大扩展了，取得了举世瞩目的成就，例如一些具有实际应用或理论价值的曲线的性质被他们用新的方法发现.

法国数学家斯柯登（1615—1660）将笛卡儿的《几何学》译成拉丁文，并给予评论，这对传播坐标几何的思想方法起了积极作用.

英国数学家沃利斯（1616—1703）于 1655 年有意识地引入负的坐标值，使坐标几何更接近现代形式. 他对代数方法的重要性的理解比笛卡儿更为深刻.

在沃利斯的启发下，牛顿（1643—1727）引入了我们称之

为“双极坐标”的坐标系(如图 2).

瑞士数学家雅各布·伯努利(1654—1705)被认为是极坐标的发明者. 他于 1691 年引入的坐标与现代的极坐标仅略有不同(如图 3). 他的学生赫尔曼用 $r$，$m$，$n$ 三个数确定平面上点 $P$ 的位置，其中 $m=\cos\theta$，$n=\sin\theta$（如图 4).

瑞士数学家欧拉(1707—1783)在《分析引论》中给出了现代形式下的解析几何(即本文中的坐标几何)的完整、系统的叙述.

对于在坐标几何发展史上做出奠基性贡献、提出划时代的原创性思想的学者们，我们永远怀着深深的崇敬和感激的心情，对于将它传播、完善的数学家们，我们也不会忘记他们的功绩.

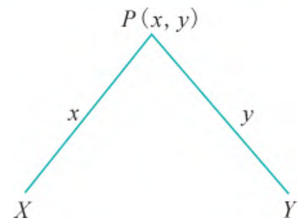



图 2

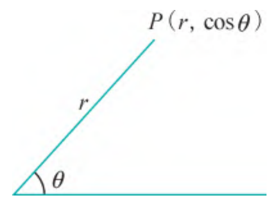



图 3

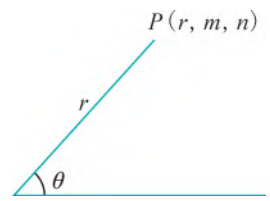



图 4

**讨论题**

读了这段材料，你对数学的发展有什么新的认识？请查询相关资料，进一步了解解析几何产生与发展的历程.

# 2.2 圆与圆的方程

## 2.2.1 圆的方程

圆是一种简单而又美妙的几何曲线，日常生活中处处可以见到圆的模型. 如何确定一个圆呢？两千多年前我国的墨子(约公元前 468—前 376 年)就曾经说过：圆，一中同长也.

与直线一样，我们也可以在平面直角坐标系中确定圆的方程.

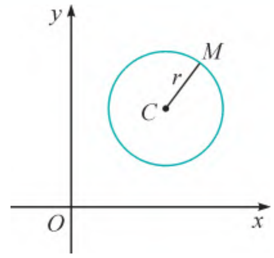



图 2-14

如图 2-14 所示，在平面直角坐标系中，设圆的圆心为 $C(a, b)$，半径为 $r$，下面我们来求圆的方程.

设 $M(x, y)$ 是圆 $C$ 上任一点，由圆的定义知 $|MC|=r$. 由两点间的距离公式，得

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r. \qquad ①$$

把①式两边平方，得

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad ②$$

反之，若点 $M(x, y)$ 的坐标适合方程②，说明点 $M$ 与圆心 $C$ 的距离为 $r$，即点 $M$ 在圆 $C$ 上.

因此我们说方程②是以 $C(a, b)$ 为圆心，$r$ 为半径的圆的方程，叫作**圆的标准方程**(standard equation of circle).

如果圆心在坐标原点，这时 $a=0$，$b=0$，那么圆的方程是

$$x^2+y^2=r^2.$$

**例 1** 已知圆 $C$ 的方程是 $(x+1)^2+(y-1)^2=4$，分别判断点 $A(1, 1)$，$B(0, 1)$，$M(0, 3)$ 在圆内、圆上还是圆外.

> 可以借助图形理解如何判断点与圆的位置关系.

**解** 把 $A$，$B$，$M$ 三点的坐标分别代入圆的方程的左边，得

$$(1+1)^2+(1-1)^2=4,$$
$$(0+1)^2+(1-1)^2=1<4,$$
$$(0+1)^2+(3-1)^2=5>4.$$

因此，点 $A$ 在圆上，点 $B$ 在圆内，点 $C$ 在圆外.

**例 2** 写出下列各圆的标准方程：

(1) 以点 $M(-3, 8)$ 为圆心，过点 $P(1, 5)$；

(2) 半径为 2，圆心在 $x$ 轴上，且与直线 $x=1$ 相切.

**解** （1）圆的半径为

$$r=|PM|=\sqrt{[1-(-3)]^2+(5-8)^2}=5.$$

所以，所求圆的标准方程是

$$(x+3)^2+(y-8)^2=25.$$

（2）由题设条件知，圆的圆心为$(-1，0)$或$(3，0)$，故所求圆的标准方程为

$$(x+1)^2+y^2=4 \text{ 或 } (x-3)^2+y^2=4.$$

**例3** 已知圆心是$C(1，1)$的圆被直线$x-y-2=0$所截得的弦长为$2\sqrt{2}$，求圆的方程.

**解** 圆心$C(1，1)$到直线$x-y-2=0$的距离为

$$d=\frac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}.$$

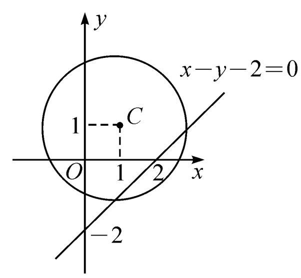


图 2-15

因为以弦心距、半弦长及圆的半径为边长可构成一个直角三角形，所以此圆的半径为

$$r=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2}=2.$$

因此，所求圆的方程为

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4.$$

## 练习

**1.** 指出下列各圆的圆心和半径：

（1）$(x+2)^2+(y+3)^2=5$；

（2）$(x-1)^2+(y+1)^2=m^2$；

（3）$x^2+(y+a)^2=-a$.

**2.** 写出下列各圆的方程：

（1）圆心是$(2，-\sqrt{3})$，半径是$\sqrt{7}$；

（2）圆心是$(-2，0)$，与$y$轴相切；

（3）以点$(-2，3)$，$(4，-5)$为一直径的两个端点.

**3.** 求以$C(1，3)$为圆心，并且与直线$3x-4y-7=0$相切的圆的方程.

前面我们推导出了圆的标准方程②，将它展开，得

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

一般地，任何一个圆的方程都可以写成下面的形式

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0. \quad ③$$

反过来，形如③的方程是否一定表示一个圆呢？

为了寻求它表示圆的条件，我们只需将方程左边按 $x$，$y$ 配方，这时得到

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}. \quad ④$$

当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程③能否表示一个几何图形？

当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程③能否表示一个几何图形？

比较方程④与圆的标准方程②，可以看出，当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程③表示以 $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$ 为圆心，$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 为半径的圆.

因此，当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程③叫作**圆的一般方程**(general equation of circle).

**例 4** 求经过三点 $O(0,\ 0)$，$M_1(1,\ 1)$，$M_2(4,\ 2)$ 的圆的方程，并求这个圆的半径和圆心坐标.

**解** 设所求圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

因为点 $O$，$M_1$，$M_2$ 在圆上，所以它们的坐标满足上面的方程. 将这些坐标代入方程，得

$$\begin{cases} F=0, \\ D+E+F+2=0, \\ 4D+2E+F+20=0. \end{cases}$$

解这个方程组，得 $F=0$，$D=-8$，$E=6$.

于是得到所求圆的方程是

$$x^2+y^2-8x+6y=0,$$

它可化为 $(x-4)^2+(y+3)^2=25$.

所以，所求圆的半径是 5，圆心坐标是 $(4,\ -3)$.

**例5** 已知一圆经过两点 $A(3,1)$，$B(-1,3)$，且它的圆心在直线 $3x-y-2=0$ 上，求此圆的方程.

**解** 设所求圆的圆心为 $C(a,b)$，则

$$\begin{cases}(a-3)^2+(b-1)^2=(a+1)^2+(b-3)^2,\\3a-b-2=0,\end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases}b=2a,\\3a-b-2=0.\end{cases}$$

解这个方程组得

$$\begin{cases}a=2,\\b=4.\end{cases}$$

所以圆心为 $C(2,4)$.

又半径为 $|CA|=\sqrt{(3-2)^2+(1-4)^2}=\sqrt{10}$，所以，所求圆的方程为

$$(x-2)^2+(y-4)^2=10.$$

你能否通过设圆的一般方程求解此题？

## 练习

**1.** 下列方程各表示什么图形？

(1) $x^2+y^2=0$；

(2) $x^2+y^2-2x+4y-6=0$；

(3) $x^2+y^2+2ax-b^2=0$.

**2.** 求下列各圆的半径和圆心坐标：

(1) $x^2+y^2-6x=0$；

(2) $x^2+y^2+2by=0$；

(3) $x^2+y^2-2ax-2\sqrt{3}ay+3a^2=0$.

**3.** 求经过点 $A(1,-1)$，$B(1,4)$，$C(4,-2)$ 的圆的方程.

**4.** 求经过原点和点 $P(1,1)$，并且圆心在直线 $2x+3y+1=0$ 上的圆的方程.

## 习题 2.2.1

**1.** 求下列各圆的方程，并画出它的图形：

(1) 经过点 $C(-1,1)$ 和 $D(1,3)$，圆心在 $x$ 轴上；

(2) 半径是 5，圆心在 $y$ 轴上，且与直线 $y=6$ 相切.

2. 求经过三点 $A(-1,5)$，$B(5,5)$，$C(6,-2)$ 的圆的一般方程.
3. 求经过原点 $O$ 和点 $A(-1,3)$，且在 $x$ 轴上截得弦长为 2 的圆的方程.
4. 已知一个圆的直径的两端点为 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$，求证：该圆的方程为
$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$
5. 已知圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2+4x-4y+m=0$ 关于直线 $l$ 对称，求直线 $l$ 的方程及 $m$ 的值.
6. 求经过两圆 $x^2+y^2+6x-4=0$ 和 $x^2+y^2+6y-28=0$ 的交点，并且圆心在直线 $x-y-4=0$ 上的圆的方程.
7. 求与 $y$ 轴相切，圆心在直线 $x-3y=0$ 上，且截直线 $y=x$ 所得的弦长为 $2\sqrt{7}$ 的圆的方程.

## 2.2.2 直线与圆的位置关系

设直线 $l$ 和圆 $C$ 的一般方程分别为

$$l: Ax+By+C=0,$$
$$C: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

如何由方程来研究直线与圆的位置关系呢?

我们可以先求出圆心 $C$ 的坐标和半径 $r$，再求出圆心 $C$ 到直线 $l$ 的距离 $d$，然后比较 $d$ 与 $r$ 的大小：

当 $d>r$ 时，直线 $l$ 与圆 $C$ 相离；

当 $d=r$ 时，直线 $l$ 与圆 $C$ 相切；

当 $d<r$ 时，直线 $l$ 与圆 $C$ 相交.

以上结论反过来也成立.

我们也可以应用下面的方法来确定直线与圆的位置关系.

考虑由直线 $l$ 的方程与圆 $C$ 的方程构成的方程组

$$\begin{cases}Ax+By+C=0,\\ x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.\end{cases}$$

当方程组有两组不同的实数解时，直线 $l$ 与圆 $C$ 相交；当方程组只有一组实数解时，直线 $l$ 与圆 $C$ 相切；当方程组没有实数解时，直线 $l$ 与圆 $C$ 相离.

一般地，在上面方程组中消去 $y$（或 $x$）得到关于 $x$（或 $y$）

的一元二次方程，令这个一元二次方程的判别式为 $\Delta$.

当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根，直线 $l$ 与圆 $C$ 相交，有两个交点；

当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根，直线 $l$ 与圆 $C$ 相切，有一个公共点；

当 $\Delta<0$ 时，方程无实数根，直线 $l$ 与圆 $C$ 相离，没有公共点.

以上结论反过来也成立.

**例1** 已知直线 $l$: $3x+y-6=0$ 和圆 $C$: $x^2+y^2-2y-4=0$，判断直线 $l$ 与圆 $C$ 的位置关系；如果相交，求出交点的坐标.

**解** 联立直线 $l$ 与圆 $C$ 的方程，得

$$\begin{cases} 3x+y-6=0, & ① \\ x^2+y^2-2y-4=0. & ② \end{cases}$$

消去 $y$，得

$$x^2-3x+2=0. \quad ③$$

因为方程③的判别式 $\Delta=(-3)^2-4\times1\times2=1>0$，所以直线 $l$ 与圆 $C$ 相交.

方程③的解为 $x_1=1$，$x_2=2$，把它们分别代入①得，$y_1=3$，$y_2=0$.

所以，直线 $l$ 与圆 $C$ 相交，两个交点分别是 $(1, 3)$，$(2, 0)$.

**例2** 求经过直线 $x-y+2=0$ 与直线 $x+y-2=0$ 的交点，且与圆 $x^2+y^2-2x=0$ 相切的直线 $l$ 的方程.

**解** 解方程组 $\begin{cases} x-y+2=0, \\ x+y-2=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=0, \\ y=2. \end{cases}$

因此两直线的交点为 $M(0, 2)$.

将圆的方程 $x^2+y^2-2x=0$ 化为标准方程，得 $(x-1)^2+y^2=1$，故圆心为 $(1, 0)$，圆的半径为 1.

经过交点 $M$ 且垂直于 $x$ 轴的直线的方程为 $x=0$，此直线显然与该圆相切.

若所求直线 $l$ 的斜率 $k$ 存在，设它的方程为 $y=kx+2$，即 $kx-y+2=0$，则圆心$(1,0)$到直线 $l$ 的距离等于圆的半径，即有

$$\frac{|k-0+2|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=1.$$

解得 $k=-\frac{3}{4}$，故切线的方程是 $y=-\frac{3}{4}x+2$，即

$$3x+4y-8=0.$$

综上所述，所求直线 $l$ 的方程是 $x=0$ 或 $3x+4y-8=0$.

**例3** 已知圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$，求经过圆上一点 $M(x_0,y_0)$的圆的切线的方程.

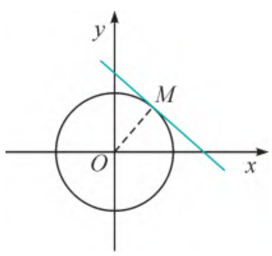


图 2-16

**解** 如图 2-16 所示. 当点 $M$ 不在坐标轴上时，$x_0 \cdot y_0 \neq 0$.

设切线的斜率为 $k$，半径 $OM$ 所在直线的斜率为 $k_1$，因为圆的切线垂直于过切点的半径，于是 $k=-\frac{1}{k_1}$.

因为 $k_1=\frac{y_0}{x_0}$，所以 $k=-\frac{x_0}{y_0}$. 所以经过点 $M$ 的圆的切线的方程是

$$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0),$$

整理得

$$x_0x+y_0y=x_0^2+y_0^2.$$

因为点 $M(x_0,y_0)$在圆上，所以 $x_0^2+y_0^2=r^2$，故所求切线的方程为

$$x_0x+y_0y=r^2.$$

当点 $M$ 在坐标轴上时，可以验证这一结论同样成立.

**例4** 圆 $x^2+y^2=8$ 内有一点 $P_0(-1,2)$，$AB$ 为过点 $P_0$ 且倾斜角为 $\alpha$ 的弦.

(1) 当弦 $AB$ 被点 $P_0$ 平分时，求直线 $AB$ 的方程；

(2) 当 $\alpha=135°$时，求弦 $AB$ 的长.

解 (1) 当弦 $AB$ 被点 $P_0$ 平分时(如图 2-17(1)),$OP_0 \perp AB$. 因为直线 $OP_0$ 的斜率为 $-2$,所以直线 $AB$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$. 根据点斜式方程,得直线 $AB$ 的方程为 $y-2=\frac{1}{2}(x+1)$,即 $x-2y+5=0$.

(2) 解法 1 当 $\alpha=135°$时(如图 2-17(2)),直线 $AB$ 的斜率是 $k=\tan 135°=-1$,直线 $AB$ 的方程为 $y-2=-(x+1)$,即

$$y=-x+1. \qquad ①$$

把①代入圆的方程 $x^2+y^2=8$,得 $x^2+(-x+1)^2=8$,即

$$2x^2-2x-7=0.$$

解此方程,得 $x=\frac{1\pm\sqrt{15}}{2}$,即 $A$,$B$ 两点的横坐标分别为

$$x_1=\frac{1-\sqrt{15}}{2},\quad x_2=\frac{1+\sqrt{15}}{2}.$$

从而 $A$,$B$ 两点的纵坐标分别为 $y_1=\frac{1+\sqrt{15}}{2}$,$y_2=\frac{1-\sqrt{15}}{2}$.

所以,$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{30}$.

解法 2 当 $\alpha=135°$时(如图 2-17(2)),直线 $AB$ 的斜率是 $k=\tan 135°=-1$,直线 $AB$ 的方程为 $y-2=-(x+1)$,即

$$x+y-1=0.$$

设弦 $AB$ 的中点为 $M$,圆心为 $O(0,0)$,则 $OM\perp AB$,所以 $|OM|$ 等于圆心 $O$ 到直线 $AB$ 的距离,即

$$|OM|=\frac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

又圆的半径 $r=2\sqrt{2}$,于是可得

$$|AB|=2|AM|=2\sqrt{r^2-|OM|^2}=2\sqrt{8-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{30}.$$

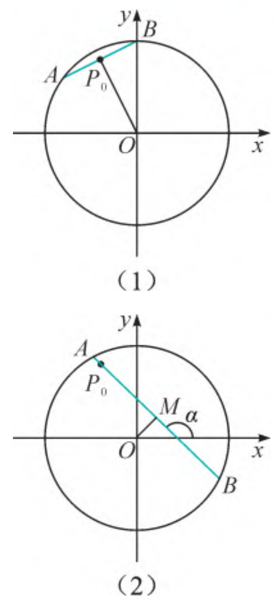


图 2-17

**例 5** 如图 2-18,在港口 $A$ 的正南方 60 km 处有一座小岛,小岛的周围有很多暗礁,分布在以小岛的中心 $O$ 为圆心、半径为 20 km 的圆形区域内. 一艘轮船在小岛东偏南 45°方向的 $B$ 处,且与小岛的中心 $O$ 相距 $40\sqrt{2}$ km,准备沿直线返回港口 $A$. 如果这艘轮船不改变航线,那么它是否有触礁的危险?

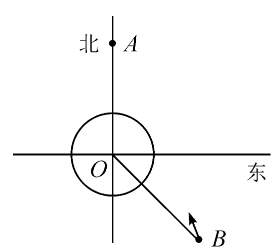


图 2-18

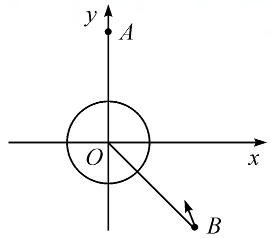


图 2-19

**解** 以 $O$ 为坐标原点建立如图 2-19 所示的平面直角坐标系，取 10 km 为单位长度. 由题意可得：点 $A$ 的坐标为 $(0, 6)$，点 $B$ 的坐标为 $(4, -4)$，暗礁区域的边界所在圆的方程为 $x^2+y^2=4$.

轮船航线所在的直线 $BA$ 的方程为 $\dfrac{y-6}{-4-6}=\dfrac{x-0}{4-0}$，即 $5x+2y-12=0$.

由点到直线的距离公式，得圆心 $O(0, 0)$ 到直线 $BA$ 的距离

$$d=\frac{|0+0-12|}{\sqrt{5^2+2^2}}=\frac{12}{\sqrt{29}}>2.$$

所以，直线 $BA$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相离.

因此，即使不改变航线，这艘轮船也不会有触礁的危险.

## 练习

1. 判断下列各题中直线与圆的位置关系：
   (1) $3x+4y-1=0$，$(x-3)^2+(y+4)^2=25$；
   (2) $x-y-1=0$，$x^2+y^2=1$；
   (3) $y=2x+3$，$x^2+y^2-4x=0$；
   (4) $5x+12y=0$，$x^2+y^2+4x-6y+9=0$.
2. 已知圆 $C$ 的方程是 $(x-1)^2+y^2=1$. 求：
   (1) 倾斜角为 $45^\circ$ 的圆 $C$ 的切线方程；
   (2) 在 $y$ 轴上截距是 1 的圆 $C$ 的切线方程.
3. 过点 $P(1, 2)$ 作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线 $l$，求切线 $l$ 的方程.
4. 已知点 $A(3, 5)$ 是圆 $x^2+y^2-4x-8y-80=0$ 的一条弦的中点，求该弦所在直线的方程.

## 习题 2.2.2

1. 求经过直线 $l_1$：$3x-y+1=0$ 和直线 $l_2$：$x+3y-1=0$ 的交点，且与圆 $x^2+y^2=\dfrac{4}{25}$ 相切的直线的方程.
2. 已知圆 $x^2+y^2=r^2$ 的切线与两坐标轴在第一象限交成的三角形的面积为 $\dfrac{2\sqrt{3}r^2}{3}$，求此切线的方程.
3. 直线 $l$：$(m+1)x+(m-1)y-2m=0$ $(m\in\mathbf{R})$ 与圆 $x^2+y^2-4y=0$ 能否相切？若能相切，求出 $m$ 的值；若不能相切，说明理由.

4. 矩形 $ABCD$ 的顶点 $A$，$B$ 在直线 $y=x-1$ 上，另外两个顶点 $C$，$D$ 为圆 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$ 的直径的两个端点，求矩形 $ABCD$ 的面积.

5. 已知△$ABC$ 的三个顶点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(3,2)$.

(1) 求△$ABC$ 的外接圆⊙$H$ 的方程；

(2) 若直线 $l$ 过点 $C$，且被⊙$H$ 截得的弦长为 2，求直线 $l$ 的方程；

(3) 求过原点的最短弦和最长弦所在的直线的方程.

## 2.2.3 圆与圆的位置关系

我们知道，平面上两个圆的位置关系有五种：外离、外切、相交、内切、内含，可以从两圆的圆心距与两圆半径的大小关系来判断.

设两个圆的方程为

$$C_1:(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2,$$

$$C_2:(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2,$$

则两个圆的圆心分别为 $C_1(a_1,b_1)$，$C_2(a_2,b_2)$，半径分别为 $r_1$，$r_2$，两圆的圆心距

$$d=|C_1C_2|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}.$$

那么，若 $d>r_1+r_2$，则两圆外离；

若 $d=r_1+r_2$，则两圆外切；

若 $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$，则两圆相交；

若 $d=|r_1-r_2|$，则两圆内切；

若 $d<|r_1-r_2|$，则两圆内含.

**例1** 判断下列各组中两圆的位置关系：

(1) $C_1:(x-1)^2+(y+1)^2=1$，

$C_2:(x+1)^2+(y+1)^2=\dfrac{9}{4}$；

(2) $C_1$：$x^2+y^2+6x-4y+9=0$，

$C_2$：$x^2+y^2-6x+12y-19=0$.

**解** (1) 圆 $C_1$ 的圆心为 $C_1(1,-1)$，半径 $r_1=1$；

圆 $C_2$ 的圆心为 $C_2(-1,-1)$，半径 $r_2=\frac{3}{2}$.

所以两圆的圆心距 $d=|C_1C_2|=2$. 因为 $r_2-r_1<d<r_1+r_2$，所以两圆相交.

(2) 将圆 $C_1$ 的方程化为标准方程，得 $(x+3)^2+(y-2)^2=4$，它的圆心为 $C_1(-3,2)$，半径 $r_1=2$.

把圆 $C_2$ 的方程化为标准方程，得 $(x-3)^2+(y+6)^2=64$，它的圆心为 $C_2(3,-6)$，半径 $r_2=8$.

两圆的圆心距为

$$d=|C_1C_2|=\sqrt{[3-(-3)]^2+(-6-2)^2}=10.$$

因为 $d=r_1+r_2$，所以两圆外切.

**例2** 判断圆 $C_1$：$x^2+y^2=32$ 与圆 $C_2$：$x^2+y^2+4x-4y=0$ 的位置关系. 若两圆存在公切线，求公切线的方程.

**解** 圆 $C_1$ 的圆心为 $C_1(0,0)$，半径为 $r_1=4\sqrt{2}$.

将圆 $C_2$ 的方程化为标准方程，得 $(x+2)^2+(y-2)^2=8$，其圆心为 $C_2(-2,2)$，半径 $r_2=2\sqrt{2}$.

两圆的圆心距

$$d=|C_1C_2|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}.$$

因为 $d=r_1-r_2$，所以两圆内切.

两圆只有一条公切线，且该公切线垂直于连心线 $C_1C_2$. 因为 $k_{C_1C_2}=-1$，所以公切线的斜率为 $k=1$.

设公切线的方程为 $y=x+b$，即 $x-y+b=0$.

由 $C_1(0,0)$ 到该公切线的距离等于 $r_1$，得

$$\frac{|b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2},$$

解得 $b=\pm 8$.

又 $C_2(-2,2)$ 到该切线的距离等于 $r_2$，经验证知 $b=-8$ 不合题意，舍去，所以 $b=8$.

因此，所求公切线的方程是 $x-y+8=0$.

**例3** 已知两圆

$C_1$：$x^2+y^2-2x+10y-24=0$，

$C_2$：$x^2+y^2+2x+2y-8=0$.

（1）求它们的公共弦的长；

（2）求以它们的公共弦为直径的圆的方程.

**解** （1）解方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+10y-24=0, & ① \\ x^2+y^2+2x+2y-8=0. & ② \end{cases}$$

②－①，得

$$x=2y-4. \quad ③$$

③代入②，得

$$5y^2-10y=0.$$

所以 $y_1=0$，$y_2=2$，分别代入③，得原方程组的解为

$$\begin{cases} x=-4, \\ y=0, \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=0, \\ y=2. \end{cases}$$

故圆 $C_1$ 与圆 $C_2$ 的交点为 $A(-4，0)$，$B(0，2)$.

所以它们的公共弦的长为

$$|AB|=\sqrt{(-4-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}.$$

（2）由（1）知以 $AB$ 为直径的圆的圆心为 $\left(\frac{-4+0}{2}，\frac{0+2}{2}\right)$，即 $(-2，1)$，半径为 $\sqrt{5}$.

因此，所求圆的方程是

$$(x+2)^2+(y-1)^2=5.$$

如果两圆相交，两圆的方程相减，即得两圆的公共弦所在直线的方程.

## 练习

**1.** 判断下列各组中两圆的位置关系：

（1）$(x-2)^2+y^2=1$ 与 $(x-4)^2+y^2=9$；

（2）$(x+1)^2+y^2=1$ 与 $x^2+(y-1)^2=1$；

（3）$(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 与 $(x+2)^2+(y-2)^2=9$；

（4）$x^2+y^2=4$ 与 $x^2+y^2-10x+16=0$.

**2.** 求过圆 $x^2+y^2-2x+2y-7=0$ 与圆 $x^2+y^2+2x+2y-2=0$ 的两交点的直线的方程.

**3.** 点 $P$ 在圆 $x^2+y^2=4$ 上运动，点 $Q$ 在圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 上运动，求 $|PQ|$ 的最大值与最小值.

## 习题 2.2.3

1. 判断圆 $C_1$：$x^2+y^2=64$ 与圆 $C_2$：$\left(x+\frac{32}{3}\right)^2+y^2=\frac{64}{9}$ 的位置关系，并求它们的公切线的方程.
2. 已知圆 $C_1$：$x^2+y^2-10x-10y=0$ 和圆 $C_2$：$x^2+y^2+6x+2y-40=0$，求两圆的公共弦的长.
3. 求经过点 $(-2,\ 4)$ 且以两个圆 $x^2+y^2-6x=0$ 和 $x^2+y^2=4$ 的公共弦为一条弦的圆的方程.

## 课题学习

### 数学探究

——直线系方程

**探究课题：** 过两直线交点的直线系方程.

**探究目的：** 体验直线系方程的优越性.

**探究方法：** 类比，归纳.

**1. 背景介绍**

我们知道，确定一条直线只需两个独立条件. 如果只给出一个条件，适合这一条件的直线就有无数多条.

例如，在方程 $y=kx+2$ 中，当 $k$ 取 1，2，3，0，$-1$，$-2$，$-3$ 等不同数值，就得到许多不同的直线，它们在 $y$ 轴上的截距都等于 2(如图 1).

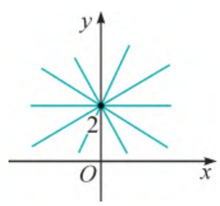



图 1

又如，在方程 $y=3x+b$ 中，给 $b$ 许多不同的数值，就得到对应的一系列平行直线(如图 2).

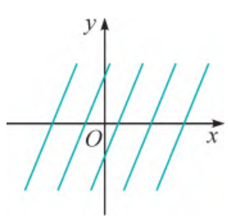



图 2

由此可见，当直线方程中的斜率 $k$ 和截距 $b$ 只有一个是常数时，所得到的是具有某一公共性质的许多直线. 像这样具有某一公共性质的直线的集合，叫作直线系，它们

的方程叫作直线系方程.

特别地，平面内通过某一点的直线系，通常叫作中心直线系，又叫直线束，所通过的公共点，也叫作直线系的中心或直线束的束心. 图 1 就是以点 $(0, 2)$ 为束心的直线系，但在直线束方程 $y=kx+2$ 中，不包括通过点 $(0, 2)$ 且垂直于 $x$ 轴的直线.

有时直线束的束心是由两条已知直线的交点给出的，下面讨论其方程的一般形式.

**2. 探究过程**

设直线 $l_1$ 与 $l_2$ 的方程分别为：

$$l_1：A_1x+B_1y+C_1=0, \quad ①$$

$$l_2：A_2x+B_2y+C_2=0. \quad ②$$

为探究过两直线交点的直线系方程，请回答下列问题：

问题 1　由 $B_2\times$①$-B_1\times$②，得

$$(A_1B_2-A_2B_1)x+(B_2C_1-B_1C_2)=0. \quad ③$$

由 $A_2\times$①$-A_1\times$②得

$$(A_2B_1-A_1B_2)y+(A_2C_1-A_1C_2)=0. \quad ④$$

这里的③，④分别是关于 $x$，$y$ 的一次方程，它们分别表示什么直线？与直线 $l_1$，$l_2$ 有什么关系？

问题 2　将上述求 $x$，$y$ 的过程一般化，即对不全为 0 的实数 $m$，$n$，做运算：$m\times$①$+n\times$②，得方程

$$m(A_1x+B_1y+C_1)+n(A_2x+B_2y+C_2)=0. \quad ⑤$$

方程⑤是否仍表示一直线？若表示直线，它与直线 $l_1$，$l_2$ 又有什么关系呢？

问题 3　方程⑤是否可以表示过直线 $l_1$，$l_2$ 的交点的所有直线？

问题 4　为减少方程⑤中的参数，不妨令 $\lambda=\dfrac{n}{m}$，则方程⑤改写为下面的形式：

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0. \quad ⑥$$

它能否表示过直线 $l_1$，$l_2$ 的交点的所有直线？

问题 5　试应用上述结论解答下列问题.

(1) 求证：无论 $k$ 为什么实数，直线

$$(2k-1)x-(k+3)y-(k-11)=0$$

必过一定点，并求出这个定点的坐标.

(2) 直线经过 $x+y-6=0$ 和 $2x-y-3=0$ 的交点及点 $(0, 0)$，求此直线的方程.

**3. 参考结果**

问题 1　当 $A_1B_2\neq A_2B_1$ 时方程③表示垂直于 $x$ 轴的直线；当 $A_2B_1\neq A_1B_2$ 时方程④表示垂直于 $y$ 轴的直线. 它们都经过直线 $l_1$，$l_2$ 的交点.

问题 2　方程⑤仍表示一直线，且过直线 $l_1$，$l_2$ 的交点.

问题 3　方程⑤包含了过直线 $l_1$，$l_2$ 的交点的所有直线，所以方程⑤叫作过直线 $l_1$，$l_2$ 的交点的直线系方程.

问题 4　方程⑥能表示过直线 $l_1$，$l_2$ 的交点的除 $l_2$ 以外的所有直线. 常用此方程表示过 $l_1$，$l_2$ 的交点的直线系方程.

问题 5　(1) 将原方程整理得

$$k(2x-y-1)-(x+3y-11)=0.$$

它表示过直线 $l_1$：$2x-y-1=0$ 及直线 $l_2$：$x+3y-11=0$ 的交点的直线束.

解方程组得 $\begin{cases}2x-y-1=0,\\x+3y-11=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}$

所以，无论 $k$ 为何实数值，直线恒过定点 $(2, 3)$.

(2) 设所求直线方程为

$$x+y-6+\lambda(2x-y-3)=0\ (\lambda\in\mathbf{R}).$$

因为直线过点(0，0)，代入以上方程得 $\lambda=-2$. 因此所求直线方程为 $x+y-6-2(2x-y-3)=0$，即 $x-y=0$.

思考题

**1.** 设直线 $l_1$：$Ax+By+C_1=0$，直线 $l_2$：$Ax+By+C_2=0$ ($C_1\neq C_2$)，则

$$Ax+By+C_1+\lambda(Ax+By+C_2)=0$$

表示的直线与 $l_1$，$l_2$ 有何关系？

**2.** 是否存在实数 $\lambda$，使直线 $(2+\lambda)x+(1+\lambda)y-2(3+2\lambda)=0$ 与点 $P(-2,\ 2)$ 的距离不小于 4？

## 复习题

### A 组

**1.** 已知直线 $l$ 的倾斜角为 $\alpha-15°$，求 $\alpha$ 的取值范围.

**2.** 斜率为 2 的直线 $l$ 经过三点 $A(3,\ 5)$，$B(a,\ 7)$，$C(-1,\ b)$，求 $a+b$ 的值.

**3.** 设直线 $l$ 经过坐标原点，倾斜角为 $\alpha$. 如果将直线 $l$ 绕坐标原点按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$，得到直线 $l_1$，求 $l_1$ 的倾斜角.

**4.** 已知两点 $A(-3,\ 5-\sqrt{3})$，$B(4,\ \sqrt{3})$，过点 $P(2,\ -\sqrt{3})$ 的直线 $l$ 与线段 $AB$ 有公共点. 求：

(1) $l$ 的倾斜角 $\alpha$ 的取值范围；

(2) $l$ 的斜率 $k$ 的取值范围.

**5.** 设直线 $l$ 的方程为 $(m^2-2m-3)x+(2m^2+m-1)y-2m+6=0$，是否存在实数 $m$，使直线 $l$ 的斜率为 1. 若存在，求 $m$ 的值；若不存在，说明理由.

**6.** (1) 已知三角形的顶点是 $A(8,\ 5)$，$B(4,\ -2)$，$C(-6,\ 3)$，求经过每两边中点的三条直线的方程；

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的顶点是 $A(0,\ 5)$，$B(1,\ -2)$，$C(-6,\ 4)$，求 $BC$ 边上的中线所在直线的方程.

**7.** 一根弹簧，挂 5 kg 的物体时长 10 cm，挂 8 kg 的物体时长 16 cm. 已知在弹性限度内，弹簧长度 $l$(单位：cm) 与所挂物体质量 $w$(单位：kg) 的关系可以用直线方程来表示. 求此直线的方程，并根据这个方程，求弹簧长 12 cm 时所挂物体的质量.

8. 已知直线 $l_1$：$x+my+6=0$ 和 $l_2$：$(m-2)x+3y+2m=0$.

(1) 若 $l_1 /\!/ l_2$，求 $m$ 的值，并求出此时 $l_1$ 与 $l_2$ 之间的距离；

(2) 若 $l_1 \perp l_2$，求 $m$ 的值，并求出 $l_1$ 与 $l_2$ 的交点坐标；

(3) 若点 $P_1(3, 0)$ 到直线 $l_1$ 的距离为 1，求 $m$ 的值；

(4) 若 $l_1$ 与 $l_2$ 相交于点 $P_2(x, y)$，且交点在直线 $l_3$：$x+y+10=0$ 上，求 $m$ 的值；

(5) 当 $m$ 在实数范围内变化时，直线 $l_2$ 恒过一定点，求此定点的坐标.

9. 已知正方形的中心为 $M(0, 1)$，其中一边所在直线的方程是 $y=x-2$，求这个正方形其他三边所在直线的方程.

10. 已知直线 $l_1$：$x-3y+10=0$ 和 $l_2$：$2x+y-8=0$，过点 $M(0, 1)$ 作直线 $l$ 分别交 $l_1$，$l_2$ 于 $P_1$，$P_2$ 两点，使 $M$ 为 $P_1P_2$ 的中点，求直线 $l$ 的方程.

11. 求经过直线 $x+3y+7=0$ 与 $3x-2y-12=0$ 的交点，圆心为 $C(-1, 1)$ 的圆的方程.

12. 圆 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 上到直线 $x+y+1=0$ 的距离为$\sqrt{2}$的点共有多少个？

13. 经过原点的直线与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 相切，求切点在第三象限的切线的方程.

14. 直线 $l$ 经过点$(-5, -10)$，且在圆 $x^2+y^2=25$ 上截得的弦长为 $5\sqrt{2}$，求直线 $l$ 的方程.

15. 一条线段 $AB$ 的两个端点 $A$ 和 $B$ 分别在 $x$ 轴和 $y$ 轴上滑动，且 $|AB|=2a$，求线段 $AB$ 的中点 $M$ 的轨迹方程.



## B 组

1. 已知直线 $l$：$y=x+4$ 及点 $A(1, 3)$.

(1) 在 $l$ 上求一点 $P$，使它到原点 $O$ 和点 $A$ 的距离之和最小；

(2) 在 $l$ 上求一点 $Q$，使它到原点 $O$ 和点 $A$ 的距离之差最大.

2. 自点 $A(-3, 3)$ 发出的光线 $l$ 射到 $x$ 轴上，被 $x$ 轴反射，其反射光线所在的直线与圆 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切，求光线 $l$ 所在直线的方程.

3. 已知点 $A(-1, 0)$，$B(1, 0)$，在圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上取一点 $P$，求使 $|AP|^2+|BP|^2$ 取最小值时点 $P$ 的坐标.

4. 过点 $A(\sqrt{3}, 1)$ 作圆 $x^2+y^2=4$ 的两条弦 $AB$，$AC$ 交圆于 $B$，$C$ 两点. 若 $k_{AB}+k_{AC}=0$，求直线 $BC$ 的斜率.

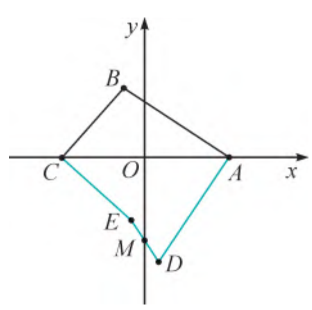
5. 圆 $x^2+y^2+x-6y+3=0$ 上两点 $P$，$Q$ 满足：

①关于直线 $kx-y+4=0$ 对称；

②$OP \perp OQ$.

求直线 $PQ$ 的方程.

6. 甲、乙两人做游戏. 乙获悉甲按下面的方案将一球埋藏于某地：甲以已知目标 $A$，$B$，$C$ 为标志，将 $AB$ 绕点 $A$ 按逆时针方向旋转 90°到达 $AD$；再将 $CB$ 绕点 $C$ 按顺时针方向旋转 90°，到达 $CE$；最后将球埋在 $DE$ 的中点 $M$ 处，再将标志 $B$ 移去. 试问：乙能否只根据标志 $A$，$C$ 找到球的埋藏处 $M$ 的位置？



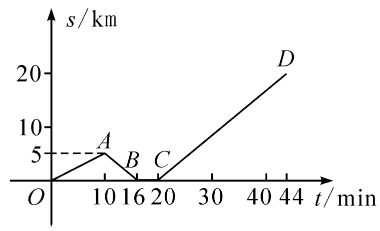
（第 6 题图）

## 思考与实践

**1.** 小张驱车前往相距 20 km 的火车站，途中发现忘了带一份文件，立即返家，找到文件后赶赴火车站，这个过程如图所示.

试求出 $OA$，$AB$，$BC$，$CD$ 所在直线的斜率，并指出其实际意义.

你还能用斜率刻画哪一些问题？




（第 1 题图）

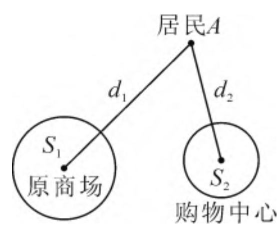
**2.** （1）试探求点 $P(x_0，y_0)$关于直线 $Ax+By+C=0$ 的对称点的求法；

（2）求直线 $l_1$：$3x-y+4=0$ 关于直线 $l$：$x-y-2=0$ 对称的直线方程.

**3.** 新落成的购物中心，往往会与原有的商场竞争. 投资者在决定新购物中心的规模时，需要考虑该处邻近地区的城市规划，看看有多少居民在其所谓的“吸引范围”内.

若将商场的规模用占地面积 $S$ 来刻画，该商场对居民 $A$ 的“吸引力”用居民 $A$ 每季度到这个商场的次数 $m$ 来描述，则“吸引力”$m$ 与商场的规模 $S$ 成正比，与居民 $A$ 到该商场的距离 $d$ 的平方成反比.

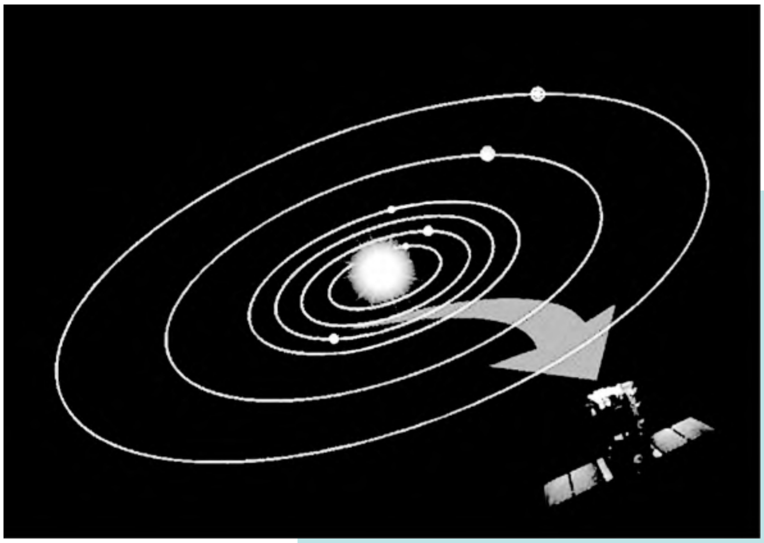
试结合本地实际，作一模拟规划，探讨新增购物中心规模与“吸引范围”的关系.




（第 3 题图）

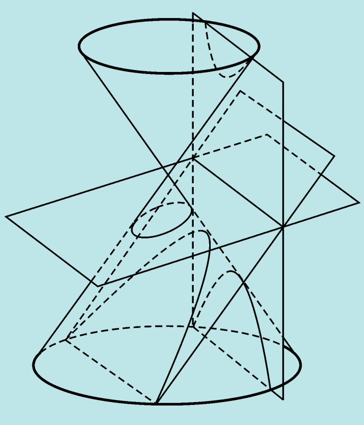
第2章 平面解析几何初步

# 第3章 圆锥曲线的方程



天体在宇宙中的运动，彗星对地球的定期拜访，人造卫星绕地球的飞行，物体的抛射……众多运动对象描绘出一条条美丽的曲线，这些曲线反映了物体运动的规律．在17世纪，开普勒就指出，太阳系中各个行星的运行轨道是椭圆，太阳的位置在其中一个焦点上．伽利略得出物体斜抛的轨迹是一条抛物线．令人惊奇的是，早在公元前3世纪，古希腊人阿波罗尼奥斯就用平面截圆锥面的办法得到了这些曲线．

给定一个圆锥面，用一个不过圆锥顶点的平面去截它，随着平面与圆锥的轴所成角的变化，得到的截面与圆锥面的交线分别是圆、椭圆、抛物线和双曲线（如图所示）．通常把椭圆、双曲线、抛物线统称为圆锥曲线．本章我们将用代数方法研究圆锥曲线的性质．



# 3.1 椭圆

## 3.1.1 椭圆及其标准方程

在生活中常常可以看到椭圆. 例如，一个篮球放在地面上，被阳光斜照留下一个影子，影子边界的形状就是一个椭圆(如图 3-1). 将一杯水适当地倾斜，水面边缘的形状也是一个椭圆(如图 3-2).

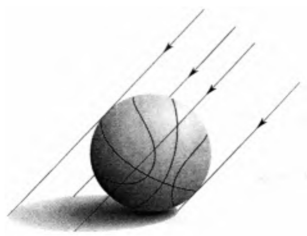


图 3-1

图 3-2

我们可以用如下方法画出椭圆：

取一条一定长的细绳，把它的两端固定在画图板的 $F_1$ 和 $F_2$ 两点处. 当绳长大于 $F_1$ 和 $F_2$ 的距离时，用笔把绳子拉紧，使笔尖在图板上连续移动. 这时，笔尖画出的封闭曲线是一个椭圆(如图 3-3).

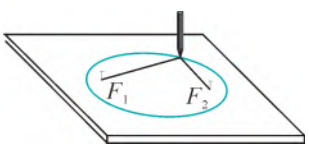



图 3-3

椭圆可以看成满足一定条件的点的集合. 这样，我们可以给出椭圆的定义：

平面内到两个定点 $F_1$，$F_2$ 的距离之和等于常数(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫作**椭圆**(ellipse). 这两个定点叫作**椭圆的焦点**，两焦点间的距离叫作**椭圆的焦距**.

下面根据椭圆的定义，求椭圆的方程.

如图 3-4，以点 $F_1$，$F_2$ 所在直线为 $x$ 轴、线段 $F_1F_2$ 的中点 $O$ 为坐标原点建立平面直角坐标系 $xOy$.

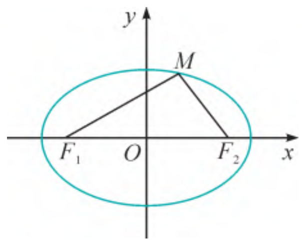



图 3-4

设 $M(x, y)$是椭圆上任意一点，椭圆的焦距为$2c(c>0)$，那么焦点 $F_1$，$F_2$ 的坐标分别为$(-c, 0)$，$(c, 0)$．又设点 $M$ 与 $F_1$ 和 $F_2$ 的距离之和等于常数 $2a(a>0)$．

由椭圆的定义，椭圆就是集合

$$\{M \mid |MF_1|+|MF_2|=2a\}.$$

因为$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，

所以 $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

即 $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

将这个方程两边平方，得

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

整理得

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad ①$$

①式两边再平方，整理得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

由椭圆的定义可知，$2a>2c$，即 $a>c$，所以 $a^2-c^2>0$.

令 $a^2-c^2=b^2$，其中 $b>0$，代入上式，得

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

两边同除以 $a^2b^2$，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0). \qquad ②$$

可以证明，以方程②的解为坐标的点都在椭圆上.

事实上，若$(x, y)$是方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的任意一个解，$F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$为两定点(这里 $c^2=a^2-b^2$)，对于坐标为$(x, y)$的点 $P$，由$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$可得

①式可变形为：

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left|x-\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{c}{a}.$$

试思考这个式子的几何意义.

与直线中的截距式方程类似，令 $a^2-c^2=b^2$ 不仅使方程变得简洁、对称，而且，在下一节可知，$b$ 还有其明确的几何意义.

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

整理可得

$$(x-c)^2+y^2=\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2.$$

又因为 $x\leqslant a$，所以 $a-\frac{c}{a}x>0$，于是可得

$$|PF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x.$$

同理可推得

$$|PF_1|=a+\frac{c}{a}x.$$

所以

$$|PF_1|+|PF_2|=\left(a-\frac{c}{a}x\right)+\left(a+\frac{c}{a}x\right)=2a,$$

即点 $P$ 到两定点 $F_1$，$F_2$ 的距离之和为常数 $2a$.

所以，以这个解 $(x, y)$ 为坐标的点 $P$ 在椭圆上.

因此，方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$可以表示椭圆.

一般地，在平面直角坐标系中，如果某曲线 $C$（看作适合某种条件的点的集合或轨迹）上的点与一个二元方程 $f(x, y)=0$的实数解建立了如下关系：

(1) 曲线上的点的坐标都是这个方程的解；

(2) 以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点.

那么，这个方程叫作**曲线的方程**(equation of the curve)，这条曲线叫作**方程的曲线**(curve of the equation).

因此，方程②就是**椭圆的方程**，我们把它叫作**椭圆的标准方程**.

同样，如果椭圆的焦点 $F_1$，$F_2$ 在 $y$ 轴上，它们的坐标分别为 $F_1(0, -c)$，$F_2(0, c)$（如图 3-5），那么所得椭圆的方程为

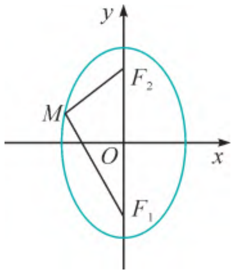


图 3-5

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0). \qquad ③$$

方程③也是椭圆的标准方程.

回顾求圆、椭圆的标准方程的过程可以看出，求曲线的方程，一般有下面几个步骤：

第一步：建立适当的平面直角坐标系，用有序数对 $(x, y)$ 表示曲线上任一点 $M$ 的坐标；

第二步：写出适合条件 $p$ 的点 $M$ 的集合 $P=\{M \mid p(M)\}$；

第三步：用 $x$，$y$ 表示条件 $p(M)$，列出方程 $f(x, y)=0$；

第四步：化方程 $f(x, y)=0$ 为最简形式；

第五步：证明以化简后的方程的解为坐标的点都是曲线上的点.

一般情况下，如果化简前后方程的解集是相同的，第五步可以省略不写. 如有特殊情况，可适当予以说明. 另外，有时根据情况，第二步也可以省略，即根据条件直接列出曲线方程.

**练习**

**1.** 填空：

（1）已知椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上一点 $P$ 到椭圆一个焦点的距离是 3，则点 $P$ 到另一个焦点的距离是____________；

（2）方程 $\frac{x^2}{k-5}+\frac{y^2}{10-k}=1$ 表示焦点在 $y$ 轴上的椭圆，则整数 $k$ 的值是____________.

**2.** 将方程 $2x^2+3y^2=5$ 化成椭圆的标准方程，然后求焦点的坐标.

**3.** （1）到 $x$ 轴距离等于 1 的点的轨迹方程是 $y=1$ 吗？为什么？

（2）设 $A$，$B$ 两点的坐标分别为 $(2, 0)$，$(0, 2)$，能否说线段 $AB$ 的方程是 $x+y-2=0$？为什么？

**例 1** 已知点 $F_1$，$F_2$ 的坐标分别是 $(-3, 0)$，$(3, 0)$. 试判断满足下列条件的动点 $M$ 的轨迹：

（1）点 $M$ 到 $F_1$，$F_2$ 的距离之和为 8；

（2）点 $M$ 到 $F_1$，$F_2$ 的距离之和为 6；

（3）点 $M$ 到 $F_1$，$F_2$ 的距离之和为 4.

**解** （1）因为 $|F_1F_2|=6$，而 $|MF_1|+|MF_2|=8>6=|F_1F_2|$，所以点 $M$ 的轨迹是以 $F_1$，$F_2$ 为焦点的椭圆.

（2）因为$|MF_1|+|MF_2|=|F_1F_2|$，所以点$M$的轨迹是线段$F_1F_2$.

（3）因为$|MF_1|+|MF_2|<|F_1F_2|$，所以点$M$的轨迹不存在.

**例2** 求满足下列条件的椭圆的标准方程：

（1）焦点坐标为$(-2, 0)$，$(2, 0)$，$b=1$；

（2）焦点在坐标轴上，$a=3b$，并且经过点$P(3, 0)$.

**解** （1）因为焦点坐标为$(-2, 0)$，$(2, 0)$，所以椭圆的焦点在$x$轴上，且$c=2$. 又$b=1$，所以$a^2=b^2+c^2=5$.

因此，所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{5}+y^2=1.$$

（2）当焦点在$x$轴上时，设椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0).$$

因为椭圆经过点$P(3, 0)$，将点$P$的坐标代入，得$a^2=9$. 又因为$a=3b$，所以$b^2=1$. 此时所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{9}+y^2=1.$$

当焦点在$y$轴上时，设椭圆的标准方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0).$$

因为椭圆经过点$P(3, 0)$，所以$\frac{3^2}{b^2}=1$，得$b^2=9$. 又因为$a=3b$，所以$a^2=81$. 此时所求椭圆的标准方程为

$$\frac{y^2}{81}+\frac{x^2}{9}=1.$$

综上所述，所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{9}+y^2=1 \text{ 或 } \frac{y^2}{81}+\frac{x^2}{9}=1.$$

**例3** 两个定点$F_1$，$F_2$的距离是8，建立适当的平面直角坐标系，写出平面内到这两个定点的距离之和是10的点$P$的轨迹方程.

**解** 由椭圆的定义知，所求点 $P$ 的轨迹是一个椭圆，焦点是 $F_1$，$F_2$.

由题意知：$2c=8$，$2a=10$. 所以 $c=4$，$a=5$，于是 $b^2=a^2-c^2=9$.

以 $F_1$，$F_2$ 所在直线为 $x$ 轴，线段 $F_1F_2$ 的垂直平分线为 $y$ 轴建立平面直角坐标系，得所求点 $P$ 的轨迹方程是

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

**注** 在未给定坐标系的情况下求点的轨迹方程时，需建立适当的平面直角坐标系，然后根据条件写出方程. 本例若以 $F_1$，$F_2$ 所在直线为 $y$ 轴，线段 $F_1F_2$ 的垂直平分线为 $x$ 轴建立平面直角坐标系，则所求点 $P$ 的轨迹方程是 $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$.

**练习**

1. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) $a=3$，$b=2$，焦点在 $x$ 轴上；

(2) $a=4$，$c=2\sqrt{3}$，焦点在 $y$ 轴上；

(3) $c=2$，焦点在 $y$ 轴上，经过点 $\left(-\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$.

2. 已知一个圆的圆心为坐标原点，半径为 4. 从这个圆上任一点 $P$ 向 $x$ 轴作垂线 $PQ$，垂足为 $Q$，求线段 $PQ$ 的中点 $M$ 的轨迹方程.

## 习题 3.1.1

1. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) $a=\sqrt{5}$，$b=1$，焦点在 $x$ 轴上；

(2) 焦点坐标为 $(0,\ -3)$，$(0,\ 3)$，$a=5$；

(3) 焦点在 $x$ 轴上，焦距等于 4，并且经过点 $P(3,\ -2\sqrt{6})$；

(4) $a+c=18$，$a-c=8$.

2. 已知椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦距是 2，求 $m$ 的值.

**3.** 若方程 $x^2\sin\alpha - y^2\cos\alpha = 1$ $(0\leqslant\alpha<2\pi)$ 表示焦点在 $y$ 轴上的椭圆，求 $\alpha$ 的取值范围.

**4.** 从圆 $x^2+y^2=25$ 上任意一点 $P$ 向 $x$ 轴作垂线 $PQ$，垂足为 $Q$，且线段 $PQ$ 上一点 $M$ 满足关系式 $|PQ|:|MQ|=5:3$，求点 $M$ 的轨迹.

**5.** 已知 $\odot O_1$：$(x+1)^2+y^2=1$ 和 $\odot O_2$：$(x-1)^2+y^2=9$，动圆 $M$ 与 $\odot O_1$ 外切，与 $\odot O_2$ 内切，求动圆圆心 $M$ 的轨迹方程.

**6.** 已知两定点 $A_1(-6, 0)$，$A_2(6, 0)$，动点 $P$ 使直线 $PA_1$，$PA_2$ 的斜率的乘积为 $-\dfrac{4}{9}$，求动点 $P$ 的轨迹方程.

## 阅读与讨论

### 为什么截口曲线是椭圆

篮球影子、杯中水面边界的形状真的符合椭圆的定义吗？下面我们就来给出证明.

事实上，篮球影子、杯中水面都可以看作圆柱的斜截面.

如图 1 所示，用一个平面去斜截一个圆柱面，记所得的截线为曲线 $C$. 在截面上、下各置一个球，它们与圆柱面分别相切，其切点构成 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$，则此两圆所在平面与圆柱面的母线垂直，所夹部分为圆柱 $O_1O_2$，两个球与截面各有一个切点 $F_1$ 和 $F_2$.

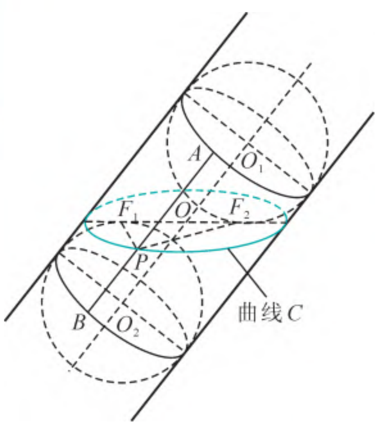



图 1

设点 $P$ 是曲线 $C$ 上任意一点，过点 $P$ 的母线与 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 分别交于点 $A$ 和点 $B$，则有

$$PA=PF_2,\ PB=PF_1.$$

设圆柱 $O_1O_2$ 的母线长为 $2a$，则恒有

$$PF_1+PF_2=PA+PB=2a,$$

即 $PF_1+PF_2$ 是一个常量. 这说明，曲线 $C$ 上任一点到两定点的距离之和是一个常数.

由椭圆的定义可知，篮球影子、杯中水面边界的形状是椭圆.

## 3.1.2 椭圆的简单几何性质

下面我们通过椭圆的标准方程来研究它的性质.

设椭圆的标准方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0).$$

**(1) 范围**

讨论方程中 $x$，$y$ 的取值范围，可以得到曲线在直角坐标系中的范围.

注意到方程中$\frac{x^2}{a^2}$，$\frac{y^2}{b^2}$是两个非负数，于是可得到关于 $x$，$y$ 的不等式

$$1-\frac{x^2}{a^2}\geqslant 0,\ 1-\frac{y^2}{b^2}\geqslant 0,$$

即 $x^2\leqslant a^2$，$y^2\leqslant b^2$. 所以

$$|x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b.$$

这就是说椭圆位于直线 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$ 所围成的矩形内（如图 3-6）.

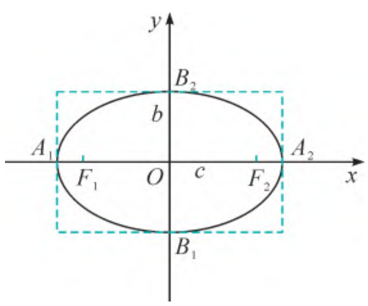



图 3-6

**(2) 对称性**

从椭圆的方程可知，若点 $P(x,y)$在椭圆上，将点 $P$ 关于 $x$ 轴的对称点 $P_1(x,-y)$ 的坐标代入椭圆方程中，可得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

由此知点 $P_1$ 的坐标满足椭圆方程，因此点 $P_1$ 在椭圆上.

同理可知：点 $P$ 关于 $y$ 轴和坐标原点的对称点 $P_2(-x,y)$，$P_3(-x,-y)$也都在椭圆上.

因此，椭圆关于 $x$ 轴、$y$ 轴成轴对称，关于坐标原点成中

心对称. 坐标轴是椭圆的对称轴，原点是椭圆的对称中心. 椭圆的对称中心叫作**椭圆的中心**.

**（3）顶点**

性质（1）中所描述的矩形给出了椭圆的范围，这个矩形的四边与$x$轴、$y$轴的交点分别是

$$A_1(-a,\ 0),\ A_2(a,\ 0),\ B_1(0,\ -b),\ B_2(0,\ b).$$

这四个点也是椭圆与$x$轴、$y$轴的交点.

因为$x$轴、$y$轴是椭圆的对称轴，所以，椭圆与对称轴有四个交点，我们把椭圆与对称轴的四个交点叫作**椭圆的顶点**.

线段$A_1A_2$，$B_1B_2$分别叫作**椭圆的长轴**和**短轴**. 它们的长分别等于$2a$和$2b$，$a$和$b$分别叫作椭圆的长半轴长和短半轴长.

**（4）离心率**

观察不同的椭圆（如图 3-7），可以发现，椭圆的扁平程度不同. 那么，用什么量可以刻画椭圆的扁平程度呢？

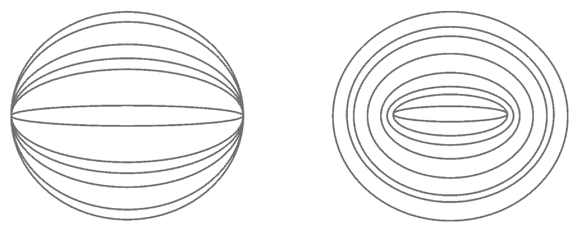


图 3-7

回顾一下我们用细绳画椭圆的过程，若细绳的长度不变，变动焦点$F_1$，$F_2$的位置，椭圆的形状会发生什么变化？

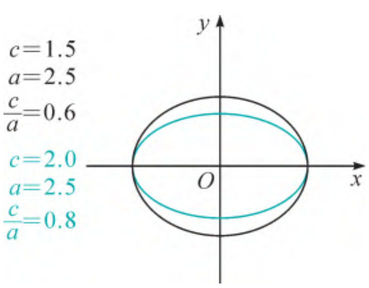



图 3-8

如图 3-8，长轴长$2a$不变，当$|F_1F_2|$变小时，比值$\frac{c}{a}$逐渐变小，这时由$b^2=a^2-c^2$知短轴长$2b$逐渐增大，因此椭圆会越来越圆；反之，椭圆会越来越扁. 即$\frac{c}{a}$反映了椭圆的扁平程度.

我们把$\frac{c}{a}$叫作**椭圆的离心率**，记为$e$，即$e=\frac{c}{a}$. 因为$a>c>0$，所以$0<e<1$.

对于焦点在$y$轴上的椭圆

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\quad(a>b>0),$$

请同学们讨论它的范围、对称性、顶点、离心率.

**例1** 求椭圆 $9x^2+25y^2=225$ 的长轴和短轴的长、离心率、焦点和顶点的坐标，并用描点法画出它的图形.

**解** 把椭圆方程化成标准方程

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1.$$

这里 $a=5$，$b=3$，所以 $c=\sqrt{25-9}=4$，且焦点在 $x$ 轴上.

因此，椭圆的长轴和短轴的长分别是 $2a=10$ 和 $2b=6$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$. 两个焦点 $F_1$，$F_2$ 的坐标分别是 $(-4,0)$ 和 $(4,0)$. 椭圆的四个顶点的坐标分别是 $A_1(-5,0)$，$A_2(5,0)$，$B_1(0,-3)$ 和 $B_2(0,3)$.

将已知方程变形为 $y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$，根据 $y=\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$ 在 $0\leqslant x\leqslant 5$ 的范围内算出椭圆上几个点的坐标 $(x, y)$，列表如下：

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 2.9 | 2.7 | 2.4 | 1.8 | 0 |

先描点画出椭圆在第一象限的一部分，再利用椭圆的对称性画出整个椭圆(如图 3-9).

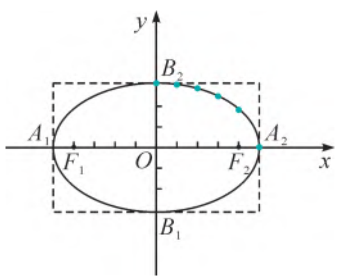



图 3-9

根据椭圆的几何性质，可以快捷地画出反映椭圆基本形状和大小的草图：以椭圆的长轴长和短轴长为边画矩形；由矩形四边的中点确定椭圆的四个顶点；用曲线将四个顶点连成一个椭圆. 画图时要注意它们的对称性及顶点附近的平滑性.

**例2** (1) 已知椭圆中心在原点，对称轴为坐标轴，离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 椭圆在 $x$ 轴正半轴和 $y$ 轴正半轴上的两个顶点分

别为 $A$ 和 $B$，原点到直线 $AB$ 的距离为$\sqrt{5}$，求此椭圆的方程.

（2）已知椭圆中心在原点，对称轴为坐标轴，且经过两点 $P(4,\ -5\sqrt{3})$，$Q(-4\sqrt{3},\ 5)$. 求此椭圆的方程.

**解**　（1）设椭圆的长半轴长和短半轴长分别为 $a$，$b$，则由$\dfrac{b}{a}=\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{a^2}}=\sqrt{1-e^2}$，得

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}. \qquad ①$$

在 Rt△$AOB$ 中，由三角形面积公式有

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\cdot\sqrt{a^2+b^2}. \qquad ②$$

联立①，②，解得

$$a^2=25,\ b^2=\frac{25}{4}.$$

因此，所求椭圆方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{4y^2}{25}=1 \text{ 或 } \frac{y^2}{25}+\frac{4x^2}{25}=1.$$

（2）设所求椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1$（$m>0$，$n>0$）.

因为椭圆经过点 $P(4,\ -5\sqrt{3})$，$Q(-4\sqrt{3},\ 5)$两点，所以

$$\begin{cases}16m+75n=1,\\48m+25n=1,\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}m=\dfrac{1}{64},\\n=\dfrac{1}{100}.\end{cases}$$

因此，所求椭圆方程是

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1.$$

**例3**　已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），分别在椭圆上求出与右焦点 $F$ 距离最近的点和最远的点的坐标.

**解**　设点 $P(x,\ y)$是椭圆上一点，则$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，所以

$$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2.$$

点 $P$ 到右焦点 $F(c, 0)$ 的距离是

$$|PF|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$=\sqrt{x^2-2cx+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}$$
$$=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2}$$
$$=\sqrt{(ex-a)^2}$$
$$=|ex-a|.$$

因为 $0<e<1$，$-a\leqslant x\leqslant a$，所以 $ex-a<0$，即

$$|PF|=a-ex.$$

$|PF|$随 $x$ 的增大而减少．当 $x=a$ 时，$|PF|$取得最小值；当 $x=-a$ 时，$|PF|$取得最大值.

所求最近点和最远点的坐标分别是 $(a, 0)$ 和 $(-a, 0)$．即椭圆上到右焦点距离最近的点和最远的点分别是长轴的两个端点.

$|PF|$ 常称为焦半径．可以证明：对左焦点 $F'(-c, 0)$，有$|PF'|=a+ex$.

**例 4** 设直线 $l$ 过点 $P(-1, 0)$，倾斜角为 $60°$，求直线 $l$ 被椭圆 $C$：$x^2+2y^2=4$ 所截得的弦长$|AB|$.

**解** 由题意，直线 $l$ 的方程为

$$y-0=\tan 60°\,[x-(-1)],$$

即

$$y=\sqrt{3}(x+1).$$

将直线 $l$ 的方程与椭圆方程联立，消去 $y$ 后整理得

$$7x^2+12x+2=0.$$

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{12}{7}$，$x_1x_2=\frac{2}{7}$.

因此，直线 $l$ 被椭圆 $C$：$x^2+2y^2=4$ 所截得的弦长

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+[\sqrt{3}(x_2-x_1)]^2}$$
$$=2\sqrt{(x_2-x_1)^2}$$
$$=2\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$
$$=2\sqrt{\left(-\frac{12}{7}\right)^2-4\times\frac{2}{7}}=\frac{4\sqrt{22}}{7}.$$

**练习**

**1.** 求下列各椭圆的长轴和短轴的长、离心率、焦点坐标、顶点坐标，并画出草图.

(1) $x^2+9y^2=81$；　　(2) $4x^2+y^2=16$.

**2.** 已知椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，$F_1$，$F_2$ 分别是它的左、右焦点，过 $F_1$ 的弦 $CD$ 与 $x$ 轴成 $\alpha$ 角 $(0<\alpha<\pi)$. 求$\triangle F_2CD$ 的周长.

**3.** 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) 经过点 $P(-4,\ 0)$，$Q(0,\ -3)$；

(2) 长轴长为 6，离心率为$\frac{2}{3}$；

(3) $c=3$，$e=\frac{3}{5}$，焦点在 $y$ 轴上；

(4) 经过两点 $P\left(\frac{3}{5},\ -4\right)$，$Q\left(-\frac{4}{5},\ 3\right)$.

**4.** 过椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 内一点 $M(2,\ 1)$引一条弦，使弦被点 $M$ 平分，求这条弦所在直线的方程.

**(5)* 准线**

在 3.1.1 节推导椭圆的标准方程时，我们得知椭圆上任一点的坐标满足

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left|x-\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{c}{a}. \quad ①$$

设直线 $l$ 的方程为 $x=\frac{a^2}{c}$，则$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$是椭圆上的点 $P(x,\ y)$到点$F(c,\ 0)$的距离，$\left|x-\frac{a^2}{c}\right|$是点 $P$ 到直线 $l$ 的距离. 于是，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任一点$P(x,\ y)$到定点$F(c,\ 0)$的距离与它到定直线 $l$：$x=\frac{a^2}{c}$的距离的比值为常数 $e\left(e=\frac{c}{a}\text{为离心率}\right)$.

反过来，若点 $M(x,\ y)$到定点 $F(c,\ 0)$的距离与它到定直线 $l$：$x=\frac{a^2}{c}$的距离的比是常数$\frac{c}{a}$ $(a>c>0)$，则有

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left|x-\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{c}{a}.$$

化简，得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

设 $a^2-c^2=b^2$，则有

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0).$$

因此，点 $M$ 的轨迹是一个椭圆（如图 3-10）.

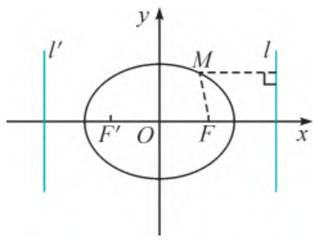



图 3-10

由此可知，当点 $M$ 到一个定点的距离与它到不过该定点的定直线的距离的比是常数 $e$（$0<e<1$）时，这个点的轨迹是椭圆. 这里定点是椭圆的焦点，定直线叫作**椭圆的准线**，常数 $e$ 是椭圆的离心率.

对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，相应于焦点 $F(c,\ 0)$ 的准线方程是 $x=\frac{a^2}{c}$. 根据椭圆的对称性，相应于焦点 $F'(-c,\ 0)$ 的准线方程是 $x=-\frac{a^2}{c}$，即椭圆有两条准线.

请你写出中心在原点，焦点在 $y$ 轴上的椭圆的准线方程.

**例5** 已知椭圆的中心在原点，长轴长是短轴长的两倍，一条准线的方程是 $x=-4$，求这个椭圆的方程.

**解** 依题意，设椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0).$$

于是

$$\begin{cases} a=2b, \\ -\dfrac{a^2}{c}=-4, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases} \qquad 解得 \begin{cases} a^2=12, \\ b^2=3. \end{cases}$$

因此，所求椭圆的方程是

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1.$$

**例6** 已知点 $P$ 是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上一点，若点 $P$ 到左焦点的距离是 3，求点 $P$ 到右准线的距离.

**解** 因为椭圆的方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，所以

$$a=5，b=4，c=3，e=\frac{3}{5}.$$

因为点 $P$ 到左焦点的距离为$|PF_1|=3$，所以点 $P$ 到右焦点的距离为$|PF_2|=2a-|PF_1|=10-3=7$.

所以，点 $P$ 到右准线的距离为

$$d=\frac{|PF_2|}{e}=7\times\frac{5}{3}=\frac{35}{3}.$$

## 练习

**1.** 求下列各椭圆的准线方程：

（1）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$；　　（2）$x^2+9y^2=36$.

**2.** 已知椭圆的两个焦点和中心将两准线间的距离四等分，求焦点与短轴两端点连线的夹角.

**3.** 已知椭圆$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$上一点 $P$ 到其左焦点的距离为 15，求点 $P$ 到此椭圆两准线的距离.

**4.** 求中心在原点，过点 $P\left(1，\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，且一条准线方程为$\sqrt{3}x-4=0$的椭圆的方程.

## 信息技术链接

### 离心率 $e$ 对椭圆扁平程度的影响

本实验先以离心率 $e$ 为已知参数，按照椭圆的定义作出轨迹，再研究离心率 $e$ 对椭圆扁平程度的影响. 为了观察方便，不妨假设椭圆的两焦点在坐标系横轴上，且关于原点对称.

1. 打开 GeoGebra，建立平面直角坐标系.

2. 按照以前学过的方法创建滑动条，定义参数 $e$，并调整参数 $e$ 的变化范围(如图 1).

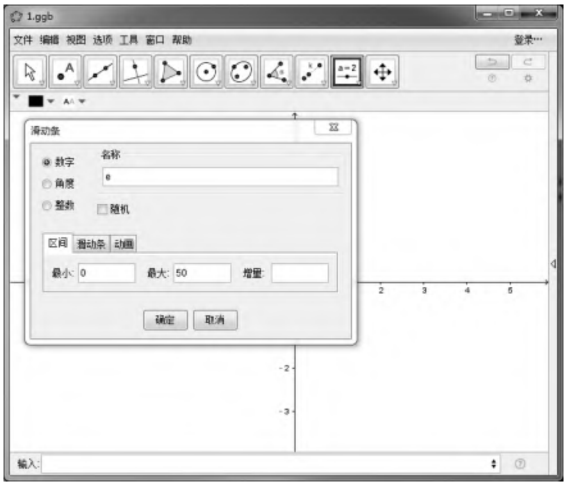



图 1

3. 作两定点. 使用“描点”工具在坐标系横轴上任意绘制一点 $F_1$ 作为一个定点(即椭圆的一个焦点)，再使用“中心对称”工具，依次点选对称的对象点 $F_1$ 和对称中心点 $O$，得到另一个定点 $F_2$(即椭圆的另一个焦点).

4. 作常数 $2a$. 使用“位似”工具，依次点选位似变换对象点 $F_1$ 和位似中心点 $O$，输入位似比“$\frac{1}{e}$”，得到点 $A_1$，采用同样的方法对点 $F_2$ 使用“位似”工具，得到点 $A_2$(如图 2)，$A_1$，$A_2$的距离即为 $2a$.

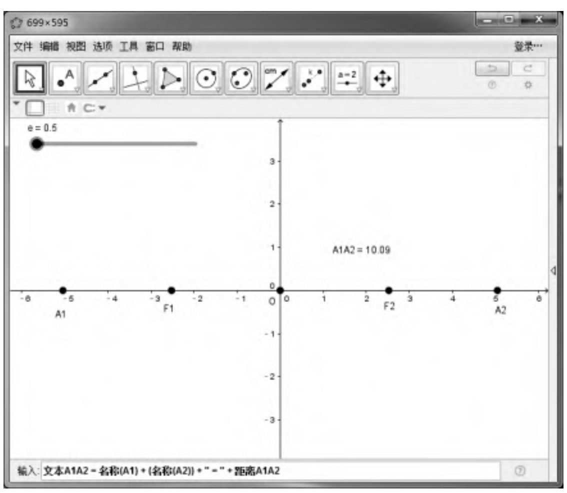



图 2

5. 作点的轨迹——椭圆.

(1) 在坐标系横轴上绘制任意一点 $C$，使用“线段”工具分别作它与 $A_1$ 和 $A_2$ 的连线段，使用“圆规(半径与圆心)”工具，依次点选其中一条线段和 $F_1$，得到圆 $F_1$；再使用该工具，依次点选另外一条线段和 $F_2$，得到圆 $F_2$.

(2) 调整点 $C$ 的位置，使得得到的两圆有两个交点. 使用“交点”工具描绘出这两个交点. 再使用“轨迹”工具，依次点选其中一个交点和点 $C$，得到这个交点的轨迹，使用同样的方法得到另外一个交点的轨迹，这样就得到了所求的轨迹——椭圆(如图 3).

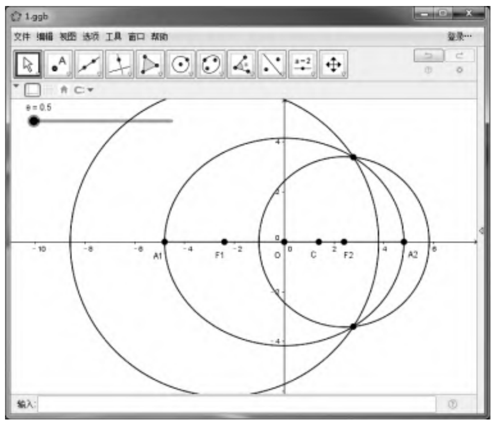


图 3

6. 研究离心率 $e$ 对椭圆扁平程度的影响.

(1) 为了观察方便，可以隐藏一些无关的图形元素(如图 4).

(2) 拖动滑动条，改变 $e$ 的大小，观察 $e$ 对椭圆形状的影响.

(3) 拖动焦点 $F_1$ 的位置，观察椭圆形状的变化.

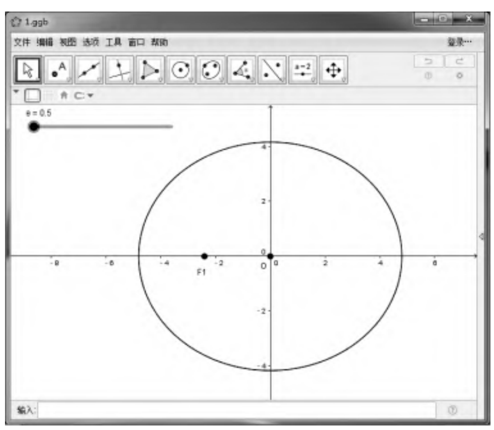


图 4

## 习题 3.1.2

**1.** 求下列各椭圆的长轴和短轴的长、离心率、焦点坐标、顶点坐标，并画出草图.

（1）$25x^2+4y^2=100$；　　　　（2）$x^2+4y^2=16$.

**2.** 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

（1）经过点 $P(-2\sqrt{2},0)$，且一个焦点坐标是 $F(\sqrt{3},0)$；

（2）长轴是短轴的 2 倍，经过点 $P(0,3)$；

（3）离心率 $e=0.8$，焦距是 8；

（4）两个顶点坐标分别是 $A(a,0)$，$B(0,a^2)$（$a>0$ 且 $a\neq1$）.

**3.** 椭圆短轴上的两个三等分点与两个焦点构成一个正方形，求此椭圆的离心率.

**4.** 已知点 $P$ 在以坐标轴为对称轴的椭圆上，且到两焦点的距离分别为 $\frac{4}{3}\sqrt{5}$，$\frac{2}{3}\sqrt{5}$. 过点 $P$ 作长轴的垂线恰好过椭圆的一个焦点，求椭圆的方程.

**5.** 已知直线 $l$：$y=2x+m$，椭圆 $C$：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（1）当 $m$ 为何值时，直线 $l$ 与椭圆 $C$ 没有交点？

（2）当 $m$ 为何值时，直线 $l$ 被椭圆 $C$ 所截弦长为 $\frac{20}{17}$？

**6.** 已知椭圆 $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ 的焦点分别是 $F_1$，$F_2$，过中心 $O$ 作直线与椭圆相交于 $A$，$B$ 两点. 若 $\triangle ABF_2$ 的面积是 20，求该直线的方程.

**7.** 已知点 $P$ 到定点 $F(4,0)$ 的距离与它到定直线 $x=\frac{25}{4}$ 的距离之比是 $\frac{4}{5}$，求点 $P$ 的轨迹方程.

# 3.2 双曲线

## 3.2.1 双曲线及其标准方程

我们已经知道，平面内到两定点 $F_1$，$F_2$ 的距离之和为常数（大于 $|F_1F_2|$）的点 $M$ 的轨迹是椭圆. 那么，平面内到两定点 $F_1$，$F_2$ 的距离之差为常数（设为 $2a$，$a>0$）的点 $M$ 的轨迹是什么呢？

当 $2a=|F_1F_2|$ 时，点 $M$ 的轨迹是什么？

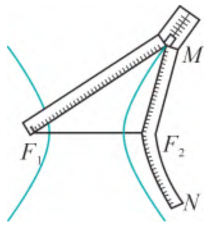


图 3-11

由三角形中两边之差小于第三边知，不可能存在点 $M$ 使得 $2a>|F_1F_2|$，因此，要使点 $M$ 的轨迹存在，必须 $2a\leqslant|F_1F_2|$.

在 $2a<|F_1F_2|$ 的条件下，可按下列步骤画出曲线.

如图 3-11，取一条拉链，拉开它的一部分，一边的端点固定在点 $F_1$ 上，在拉开的另一边上选择一点固定在点 $F_2$ 上，使点 $N$ 到点 $F_2$ 的长为 $2a\,(a>0)$. 把笔尖放在拉锁处，随着拉链被拉锁逐渐拉开或者闭拢，笔尖就画出一条曲线（如图 3-11中右边的曲线）. 这条曲线上的点构成的集合为

$$\{M\,|\,|MF_1|-|MF_2|=2a\}.$$

如果使点 $M$ 到点 $F_2$ 的距离减去到点 $F_1$ 的距离所得的差等于 $2a$，就得到另一条曲线（如图 3-11 中左边的曲线）. 这条曲线上的点构成的集合为

$$\{M\,|\,|MF_2|-|MF_1|=2a\}.$$

通过上面的实验知道，使 $||MF_1|-|MF_2||=2a$ （$2a<|F_1F_2|$）的点 $M$ 的轨迹是由两支曲线构成的.

我们把平面内到两个定点 $F_1$，$F_2$ 的距离之差的绝对值等于一个常数（小于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹叫作**双曲线**（hyperbola），这两个定点叫作**双曲线的焦点**，两焦点间的距离叫作**双曲线的焦距**.

下面我们来求双曲线的方程.

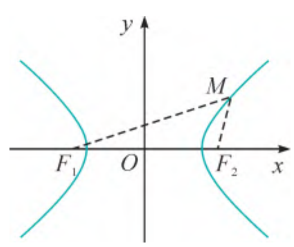


图 3-12

如图 3-12，以点 $F_1$，$F_2$ 所在直线为 $x$ 轴，线段 $F_1F_2$ 的中点 $O$ 为坐标原点，建立平面直角坐标系 $xOy$，

设 $M(x,\ y)$ 是双曲线上的任意一点，双曲线的焦距为 $2c\,(c>0)$，那么，焦点 $F_1$，$F_2$ 的坐标分别是 $(-c,\ 0)$，$(c,\ 0)$. 又设点 $M$ 与 $F_1$，$F_2$ 的距离之差的绝对值等于常数 $2a$.

由定义可知，双曲线就是点 $M$ 的集合

$$\{M \mid |MF_1|-|MF_2|=\pm 2a\}.$$

因为

$$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad |MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

所以

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

将这个方程移项、平方并化简得

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad ①$$

将此方程两边再平方，化简得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

由双曲线的定义可知，$2c>2a$，即 $c>a$，所以 $c^2-a^2>0$. 令 $c^2-a^2=b^2$，其中 $b>0$，代入上式，得

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$$

两边同除以 $a^2b^2$，得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0). \qquad ②$$

可以证明，坐标满足这个方程的点都在双曲线上.

方程②叫作**双曲线的标准方程.**

方程②表示的双曲线的焦点在 $x$ 轴上，两焦点分别是 $F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)$，其中 $c^2=a^2+b^2$.

同样，如果双曲线的焦点 $F_1$，$F_2$ 在 $y$ 轴上，它们的坐标分别是 $F_1(0,\ -c)$，$F_2(0,\ c)$，那么所得到的方程为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0). \qquad ③$$

方程③也是双曲线的标准方程.

**例1** 求到两个定点 $F_1(-13,\ 0)$，$F_2(13,\ 0)$ 的距离之差的绝对值为 24 的点 $M$ 的轨迹方程.

**解** 因为 $||MF_1|-|MF_2||=24<|F_1F_2|=26$，所以点 $M$ 的轨迹是以 $F_1$，$F_2$ 为焦点的双曲线，且 $2a=24$，即 $a=12$. 又 $c=13$，所以 $b^2=c^2-a^2=25$.

因为双曲线的焦点在 $x$ 轴上，所以所求点 $M$ 的轨迹方程是

$$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1.$$

**例2** 已知双曲线的两个焦点是 $F_1(0,\ -5)$，$F_2(0,\ 5)$，且经过点 $(3,\ -4\sqrt{2})$. 求此双曲线的标准方程.

**解** 因为双曲线的焦点在 $y$ 轴上，所以设它的标准方程为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0).$$

根据题意有

$$\begin{cases}\dfrac{32}{a^2}-\dfrac{9}{b^2}=1,\\ a^2+b^2=25,\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}a^2=16,\\ b^2=9.\end{cases}$$

因此所求双曲线的标准方程是

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1.$$

## 练习

**1.** 写出适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{3}$，焦点在 $y$ 轴上；

(2) $b=3$，$c=\frac{13}{4}$，焦点在坐标轴上；

(3) $b=2$，经过点 $(3,\ -4)$，焦点在 $x$ 轴上.

**2.** 已知方程 $\frac{x^2}{4+a}+\frac{y^2}{5+a}=1$.

(1) 求实数 $a$ 的取值范围，使方程表示双曲线；

(2) 证明 (1) 中的双曲线有共同的焦点.

**3.** 如果椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{2}=1$ 的焦点相同，求 $a$ 的值.

## 习题 3.2.1

**1.** 已知双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$上一点 $P$ 到点 $F_1(5,\ 0)$的距离为 $d$，当 $d$ 取下列值时，求点 $P$ 到点 $F_2(-5,\ 0)$的距离.

(1) $d=15$；　　(2) $d=6$.

**2.** 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) $a=6$，$b=8$；

(2) $a=2\sqrt{5}$，经过点 $A(-5,\ 2)$，焦点在 $x$ 轴上；

(3) 经过点 $P(-7,\ -6\sqrt{2})$和点 $Q(2\sqrt{7},\ -3)$.

**3.** 已知两定点 $A_1(-6,\ 0)$，$A_2(6,\ 0)$. 动点 $P$ 使直线 $PA_1$ 与直线 $PA_2$ 的斜率的乘积为$\frac{4}{9}$，求点 $P$ 的轨迹方程.

**4.** 已知曲线 $C$：$\frac{x^2}{9-m}+\frac{y^2}{m-4}=1$，求 $m$ 的取值范围，使

(1) 曲线 $C$ 表示焦点在 $x$ 轴上的双曲线；

(2) 曲线 $C$ 表示焦点在 $y$ 轴上的双曲线.

**5.** 已知 $F_1$，$F_2$ 分别是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的左、右焦点，$AB$ 是双曲线左支上过点 $F_1$ 的弦，且$|AB|=m$，求$\triangle ABF_2$ 的周长.

**6.** 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$与双曲线$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$ $(m>0,\ n>0)$有公共焦点 $F_1$，$F_2$，$P$ 是它们的一个公共点，设$\angle F_1PF_2=\alpha$.

(1) 用 $b$，$n$ 表示 $\cos\alpha$；

(2) 用 $b$，$n$ 表示$\triangle F_1PF_2$ 的面积 $S$.

## 3.2.2 双曲线的简单几何性质

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的图形如图 3-13 所示. 现在我们就来根据双曲线的方程研究它的几何性质.

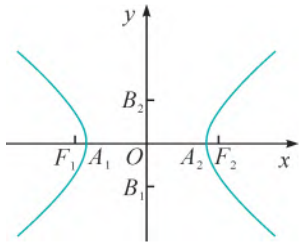



图 3-13

**（1）范围**

由双曲线方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$得$\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1$，故 $x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$. 又易知 $y\in \mathbf{R}$，所以，双曲线在不等式 $x\geqslant a$ 与 $x\leqslant -a$ 所表示的区域内.

**（2）对称性**

双曲线关于两条坐标轴成轴对称，关于坐标原点成中心对称. 坐标轴是双曲线的对称轴，原点是双曲线的对称中心. 双曲线的对称中心叫作**双曲线的中心**.

**（3）顶点**

在双曲线的标准方程里，令 $y=0$，得 $x=\pm a$，因此双曲线与 $x$ 轴有两个交点 $A_1(-a, 0)$，$A_2(a, 0)$. 因为 $x$ 轴是双曲线的对称轴，所以双曲线和它的对称轴有两个交点，它们叫作**双曲线的顶点**.

在双曲线的标准方程里，令 $x=0$，得 $y^2=-b^2$，这个方程没有实数根，说明双曲线和 $y$ 轴没有交点，但我们也把 $B_1(0, -b)$，$B_2(0, b)$ 画在 $y$ 轴上（如图 3-13).

线段 $A_1A_2$ 叫作**双曲线的实轴**，它的长等于 $2a$，$a$ 叫作双曲线的实半轴长；线段 $B_1B_2$ 叫作**双曲线的虚轴**，它的长等于 $2b$，$b$ 叫作双曲线的虚半轴长.

**（4）离心率**

我们把$\frac{c}{a}$叫作**双曲线的离心率**，记为 $e$，即 $e=\frac{c}{a}$.

因为 $c>a>0$，所以 $e>1$.

**（5）渐近线**

经过 $A_2$，$A_1$ 作 $y$ 轴的平行线 $x=\pm a$，经过 $B_2$，$B_1$ 作 $x$ 轴的平行线 $y=\pm b$，四条直线围成一个矩形，如图 3-14. 矩形的两条对角线所在的直线方程是 $y=\pm\frac{b}{a}x$，从图 3-14 可以看出：

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的各支向外延伸时与这两条直线逐渐接近.

下面我们来证明这个结论.

双曲线在第一象限内的部分可用方程表示为

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\quad (x>a).$$

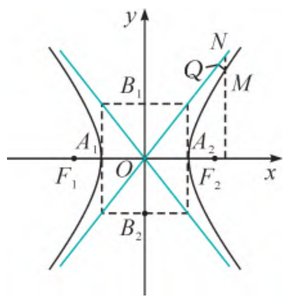


图 3-14

设 $M(x, y)$ 是它上面的点，$N(x, Y)$ 是直线 $y=\frac{b}{a}x$ 上与点 $M$ 有相同横坐标的点（如图 3-14），则

$$Y=\frac{b}{a}x.$$

因为

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}x\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}<\frac{b}{a}x=Y,$$

所以

$$\begin{aligned}|MN|=Y-y&=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})\\&=\frac{b}{a}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\\&=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.\end{aligned}$$

设 $|MQ|$ 是点 $M$ 到直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离，则 $|MQ|<|MN|$. 当 $x$ 逐渐增大时，$|MN|$ 逐渐减小；当 $x$ 无限增大时，$|MN|$ 无限接近于 0，$|MQ|$ 也无限接近于 0. 就是说，双曲线在第一象限的部分从射线 $ON$ 的下方无限接近射线 $ON$.

在其他象限内，也有类似的情况.

我们把两条直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 叫作**双曲线** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ **的渐近线**.

双曲线与它的渐近线无限接近，但永不相交.

由等式 $c^2-a^2=b^2$，可得

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}=\sqrt{e^2-1}.$$

因此，$e$ 越大，$\frac{b}{a}$ 也越大，即渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 的斜率的绝对值越大．由此可知，双曲线的离心率越大，它的开口就越开阔．

利用双曲线的渐近线，可以帮助我们较准确地画出双曲线的草图．

对于焦点在 $y$ 轴上的双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$，可以同样写出它的范围、对称性、顶点、离心率、渐近线方程，请同学们自己完成．

**例 1** 已知双曲线的方程 $y^2-4x^2=1$，求它的焦点坐标、顶点坐标、离心率、渐近线方程．

**解** 将方程化为标准方程，得

$$y^2-\frac{x^2}{\frac{1}{4}}=1.$$

可知双曲线的焦点在 $y$ 轴上，且 $a=1$，$b=\frac{1}{2}$，所以

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

因此双曲线的焦点坐标是 $\left(0,-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$，$\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$，顶点坐标是 $(0,-1)$，$(0,1)$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，渐近线方程是 $y=\pm 2x$．

**例 2** 求双曲线 $x^2-y^2=a^2$ $(a>0)$ 的实轴和虚轴的长、离心率、渐近线方程．

**解** 双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$，所以

它的实轴长为 $2a$，虚轴长为 $2a$，离心率 $e=\sqrt{2}$，渐近线方程是 $y=\pm x$.

我们把实轴与虚轴等长的双曲线叫作**等轴双曲线**.

**例3** 已知双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{2}{3}x$，且经过点 $M(-6, 2)$，求此双曲线的标准方程.

**解** 因为双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{2}{3}x$，因此可设所求双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=\lambda \quad (\lambda\neq 0).$$

又双曲线过点 $M(-6, 2)$，所以有 $\frac{(-6)^2}{9}-\frac{2^2}{4}=\lambda$，即 $\lambda=3$. 于是所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=3$，因此所求双曲线的标准方程是

$$\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{12}=1.$$

**例4** 已知双曲线 $C$：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦距为 $2c$，如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数根，求双曲线 $C$ 的离心率的取值范围.

**解** 因为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数根，所以

$$b^2-4ac<0.$$

又因为 $b^2=c^2-a^2$，所以

$$c^2-a^2-4ac<0.$$

两边同时除以 $a^2$，得

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2-\frac{4c}{a}-1<0.$$

注意到 $e=\frac{c}{a}$，所以 $e^2-4e-1<0$，解得

$$2-\sqrt{5}<e<2+\sqrt{5}.$$

又因为 $e>1$，所以 $1<e<2+\sqrt{5}$.

所以，双曲线 $C$ 的离心率 $e$ 的取值范围为 $(1, 2+\sqrt{5})$.

## 练习

**1.** 求下列双曲线的实轴长和虚轴长、离心率、顶点和焦点的坐标、渐近线方程：

(1) $9y^2-16x^2=144$；　　(2) $x^2-y^2=4$.

**2.** 设双曲线的实半轴长、虚半轴长、半焦距分别为 $a$，$b$，$c$. 已知 $a$，$b$，$c$ 成等差数列，求双曲线的离心率 $e$.

**3.** 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 焦距是 10，过点 $P(4，1)$；

(2) 焦点是 $F_1(0，-10)$，$F_2(0，10)$，其一条渐近线方程是 $5x-3y=0$；

(3) 渐近线方程是 $y=\pm\frac{3}{2}x$，实轴长为 12.

**4.** 当渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 时，双曲线的标准方程一定是$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$吗？如果是，说明理由；如果不一定，举出一个反例.

**5.** 求下列直线与曲线相交所得弦的长：

(1) $3x+10y-25=0$，$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$；

(2) $x-y+1=0$，$x^2-y^2=3$.

**(6)* 准线**

与推导椭圆准线的过程一样，我们可以得到：当点 $M$ 到一个定点的距离与它到不过该定点的一条定直线的距离的比是常数 $e\,(e>1)$ 时，这个点的轨迹是双曲线. 定点是双曲线的焦点，定直线叫作**双曲线的准线**，常数 $e$ 是双曲线的离心率（如图 3-15）.

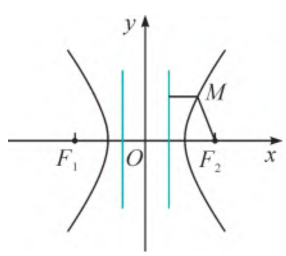



图 3-15

不难得出，对于双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，相应于焦点 $F_2(c，0)$ 的准线方程是 $x=\frac{a^2}{c}$.

根据双曲线的对称性，相应于焦点 $F_1(-c, 0)$ 的准线方程是 $x=-\frac{a^2}{c}$，即双曲线有两条准线.

焦点在 $y$ 轴上的双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 的准线方程为 $y=\pm\frac{a^2}{c}$.

**例5** 已知双曲线的中心在原点，坐标轴为对称轴，一条渐近线的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$，一条准线的方程为 $x=6$，求它的标准方程.

**解** 由题设可知双曲线的焦点在 $x$ 轴上，设它的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0, b>0),$$

于是有

$$\frac{b}{a}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{a^2}{c}=6.$$

又 $c^2=a^2+b^2$，于是可得

$$a^2=48, \ b^2=16.$$

因此所求双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{16}=1.$$

**例6** 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$，点 $P$ 为双曲线上一点. 点 $P$ 到右焦点的距离为 $6a$，到左准线的距离为 $3a$. 求双曲线的离心率.

**解** 设点 $P$ 到左焦点的距离为 $d$. 由双曲线定义，得 $|d-6a|=2a$，所以 $d=8a$ 或 $d=4a$.

又点 $P$ 到左准线的距离为 $3a$，故双曲线的离心率为

$$e=\frac{8}{3} \text{ 或 } e=\frac{4}{3}.$$

## 练习

**1.** 求下列双曲线的准线方程：

(1) $4x^2-9y^2=36$；　　(2) $4x^2-9y^2=-36$.

**2.** 求下列双曲线的标准方程：

(1) 准线方程是 $x=\pm1$，离心率 $e=\frac{3}{2}$；

(2) 两准线间的距离是$\frac{32}{5}$，且虚轴长是 6.

**3.** 如果双曲线$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$上一点 $P$ 到右焦点的距离是 8，求点 $P$ 到左准线的距离.

**4.** 双曲线的虚轴长、实轴长与焦距成等差数列，右准线是 $x=1$，且经过点 $A(2，2)$.

(1) 求此双曲线的离心率 $e$；

(2) 求此双曲线的右焦点的轨迹方程.

## 习题 3.2.2

**1.** 求下列双曲线的标准方程：

(1) 焦距是 26，虚轴长是 24，焦点在 $y$ 轴上；

(2) 离心率是 $e=\sqrt{2}$，经过点 $M(-5，3)$.

**2.** 求下列双曲线的实轴长和虚轴长、焦点和顶点的坐标、离心率和渐近线的方程：

(1) $4x^2-9y^2=36$；　　(2) $4x^2-9y^2=-36$.

**3.** 求满足下列条件的双曲线的离心率：

(1) 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<a<b)$ 的半焦距是 $c$，直线 $l$ 过 $(a，0)$，$(0，b)$ 两点，且原点到直线 $l$ 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{4}c$；

(2) 双曲线的两条渐近线的夹角为 $60°$.

**4.** 一双曲线与椭圆 $x^2+4y^2=64$ 有共同的焦点，它的一条渐近线方程是 $x-\sqrt{3}y=0$，求此双曲线的方程.

**5.** 求与双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$有共同渐近线且焦距为 $2\sqrt{5}$的双曲线的方程.

**6.** 直线 $y=kx-1$ 与双曲线 $3x^2-y^2=1$ 相交于 $A$，$B$ 两点. 当 $k$ 为何值时，以 $AB$ 为直径的圆经过坐标原点？

**7.** 如果直线 $y=kx-1$ 与双曲线 $x^2-y^2=4$ 的两支各有一个交点，求 $k$ 的取值范围.

# 3.3 抛物线

椭圆和双曲线都可看成是平面内到一个定点的距离与到一条定直线(不过该定点)的距离的比是常数 $e$ 的点的轨迹．当 $0<e<1$ 时是椭圆，当 $e>1$ 时是双曲线．那么，当 $e=1$ 时，它是什么曲线呢?

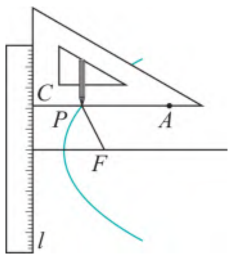



图 3-16

把一根直尺固定在直线 $l$ 的位置(如图 3-16)，把一块直角三角板的一条直角边紧靠着直尺的边缘，再把一条细绳的一端固定在三角板的另一直角边的一点 $A$ 处，取绳长等于点 $A$ 到直角顶点 $C$ 的距离，并且把绳子的另一端固定在底板上的一点 $F$ 处，用笔尖扣着绳子，使点 $A$ 到笔尖的一段绳子紧靠着三角尺，然后将三角尺沿着直尺上下滑动，笔尖就在图板上描出一条曲线．注意图 3-16 中，$|PC|=|PF|$．如果把点 $F$ 看作一个定点，$l$ 看作定直线，那么我们所描的正是$e=1$时的曲线．

平面内到一个定点 $F$ 与一条定直线 $l$(不过该定点)的距离相等的点的轨迹叫作**抛物线**(parabola)．点 $F$ 叫作抛物线的**焦点**，直线 $l$ 叫作抛物线的**准线**．

抛物线被广泛应用于生产和生活中，如卫星电视接收天线与其轴截面的交线，某些桥拱的拱形曲线等都是抛物线(如图 3-17)．

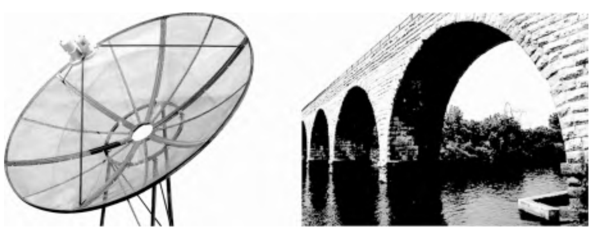


图 3-17

下面求抛物线的方程.

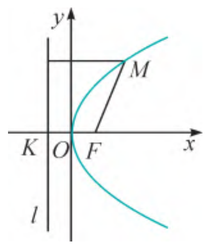


图 3-18

如图 3-18，经过点 $F$ 作直线 $KF$ 垂直于直线 $l$，垂足为 $K$，以线段 $KF$ 的中点 $O$ 为坐标原点，直线 $KF$ 为 $x$ 轴，建立平面直角坐标系 $xOy$.

设 $|KF|=p$（$p>0$），那么焦点 $F$ 的坐标为 $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$，准线 $l$ 的方程为 $x=-\frac{p}{2}$.

设点 $M(x,\ y)$ 是抛物线上任意一点，点 $M$ 到 $l$ 的距离为 $d$. 由抛物线的定义，有 $|MF|=d$.

因为

$$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},$$

$$d=\left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

所以

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

将上式两边平方并化简，得

$$y^2=2px \quad (p>0). \qquad ①$$

可以证明，坐标满足这个方程的点都在抛物线上.

方程①叫作抛物线的**标准方程**. 它表示的抛物线的焦点在 $x$ 轴的正半轴上，坐标是 $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$，准线方程是 $x=-\frac{p}{2}$.

由此抛物线方程，我们很容易得到抛物线的几何性质.

**（1）范围**

因为 $p>0$，由方程①可知，抛物线上的点 $M$ 的坐标 $(x,\ y)$ 满足 $x\geqslant 0$，所以这条抛物线在 $y$ 轴的右侧. 当 $x$ 的值增大时，$|y|$ 也增大，这说明这条抛物线向右上方和右下方无限延伸.

**（2）对称性**

方程①表示的抛物线关于 $x$ 轴对称. 抛物线的对称轴叫作**抛物线的轴**.

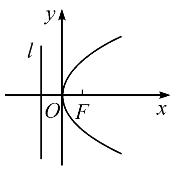
**（3）顶点**

抛物线与它的轴只有一个交点. 抛物线和它的轴的交点叫作**抛物线的顶点**. 方程①表示的抛物线的顶点是坐标原点.

**（4）离心率**

抛物线上的点 $M$ 到焦点的距离和它到准线的距离的比，叫作**抛物线的离心率**. 抛物线的离心率 $e=1$.

抛物线的标准方程还有其他几种形式，请同学们完成下表：

| 标准方程 | 图形 | 焦点坐标 | 准线方程 | 对称轴 |
|---|---|---|---|---|
| $y^2=2px$ $(p>0)$ |   | $\left(\frac{p}{2},0\right)$ | $x=-\frac{p}{2}$ | $x$ 轴 |
| $y^2=-2px$ $(p>0)$ | | | | |
| $x^2=2py$ $(p>0)$ | | | | |
| $x^2=-2py$ $(p>0)$ | | | | |

**例1** 已知抛物线的焦点坐标是(1，0)，写出它的标准方程，并用描点法画出图形.

**解** 因为焦点在 $x$ 轴正半轴上，并且 $\frac{p}{2}=1$，即 $p=2$，所以所求抛物线的标准方程是

$$y^2=4x.$$

将已知方程变形为 $y=\pm2\sqrt{x}$，根据 $y=2\sqrt{x}$，计算抛物线在 $x\geqslant0$ 范围内几个点的坐标，得

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 2 | 2.8 | 3.5 | 4 | … |

描点画出抛物线的一部分，再利用对称性，就可以画出抛物线的另一部分（如图3-19）.

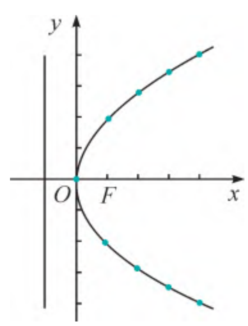



图 3-19

## 练习

**1.** (1) 已知抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 上一点 $M$ 的横坐标是 $x_0$，求点 $M$ 到焦点 $F$ 的距离；

(2) 已知抛物线 $x^2=-2py$ ($p>0$) 上一点 $M$ 的纵坐标是 $y_0$，求点 $M$ 到焦点 $F$ 的距离.

**2.** 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

(1) $y^2=6x$；　(2) $y=4x^2$；　(3) $2x+3y^2=0$；　(4) $x^2+y=0$.

**3.** 写出下列抛物线的标准方程：

(1) 焦点坐标是 $F(0,-2)$；　(2) 准线方程是 $y=-2$.



**例2** (1) 求顶点在原点，焦点在直线 $x-2y-4=0$ 上的抛物线的标准方程；

(2) 已知抛物线上一点 $A(m,-3)$ 到焦点 $F$ 的距离是 5，开口向下，求此抛物线的标准方程及 $m$ 的值.

**解** (1) 直线 $x-2y-4=0$ 与 $x$ 轴交于点 $A(4,0)$，与 $y$ 轴交于点 $B(0,-2)$.

当焦点为 $A(4,0)$ 时，$\frac{p}{2}=4$，即 $p=8$，所求抛物线的标准方程为 $y^2=16x$；

当焦点为 $B(0,-2)$ 时，$\frac{p}{2}=2$，即 $p=4$，所求抛物线的标准方程是 $x^2=-8y$.

综上所述，所求抛物线的标准方程为

$$y^2=16x \text{ 或 } x^2=-8y.$$

(2) 因为抛物线的开口向下，故设其方程为

$$x^2=-2py\quad(p>0),$$

这时准线方程为 $y=\frac{p}{2}$. 由题意得

$$\frac{p}{2}-(-3)=5,$$

解得 $p=4$. 所以所求抛物线的方程为

$$x^2=-8y.$$

又点 $A(m,-3)$ 在抛物线上，因此有 $m^2=-8\times(-3)$，解得 $m=\pm2\sqrt{6}$.

**例3** 如图 3-20，过抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点 $F$ 且倾斜角为 $\alpha$（$\alpha\neq0°$）的直线交抛物线于 $A$，$B$ 两点，直线 $OA$ 与抛物线的准线交于点 $D$．求证：

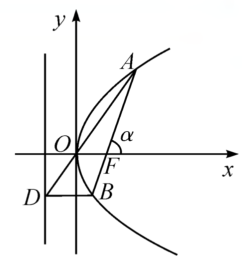


图 3-20

（1）$|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$；　　（2）$BD\parallel x$ 轴．

**证明**　由题意，可设直线 $AB$ 的方程为 $x=my+\dfrac{p}{2}$，与抛物线方程 $y^2=2px$ 联立，消去 $x$，整理得

$$y^2-2mpy-p^2=0.$$

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则

$$y_1+y_2=2mp,\ y_1y_2=-p^2.$$

（1）$|AB|=|AF|+|BF|$

$$\begin{aligned}&=\left[x_1-\left(-\frac{p}{2}\right)\right]+\left[x_2-\left(-\frac{p}{2}\right)\right]\\&=x_1+x_2+p\\&=m(y_1+y_2)+2p\\&=m\cdot2mp+2p\\&=2p(m^2+1).\end{aligned}$$

当 $\alpha\neq90°$时，$m^2=\dfrac{1}{\tan^2\alpha}$，所以 $m^2+1=\dfrac{1}{\tan^2\alpha}+1=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$，所以$|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$.

当 $\alpha=90°$ 时，$A\left(\dfrac{p}{2},\ p\right)$，$B\left(\dfrac{p}{2},\ -p\right)$，$|AB|=2p=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$.

综上所述，$|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$.

（2）因为 $x_1=\dfrac{y_1^2}{2p}$，直线 $OA$ 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1}\cdot x$，即

$$y=\frac{2p}{y_1}\cdot x.$$

直线 $OA$ 与抛物线的准线 $l$：$x=-\dfrac{p}{2}$的交点 $D$ 的纵坐标为

$$y_D=\frac{2p}{y_1}\cdot\left(-\frac{p}{2}\right)=-\frac{p^2}{y_1}.$$

又由 $y_1y_2=-p^2$，可得 $y_2=-\dfrac{p^2}{y_1}$.

所以 $y_2=y_D$，故 $BD/\!/x$ 轴.

**例4** 当 $k$ 为何值时，直线 $y=kx+k-2$ 与抛物线 $y^2=4x$ 有两个公共点？仅有一个公共点？没有公共点？

**解** 由

$$\begin{cases} y=kx+k-2, \\ y^2=4x, \end{cases}$$

消去 $y$ 并整理得

$$k^2x^2+2(k^2-2k-2)x+(k-2)^2=0. \quad ①$$

(1) 直线与抛物线有两个公共点，则必须方程①有两个不等实根，因此有

$$\begin{cases} k^2\neq 0, \\ 4(k^2-2k-2)^2-4k^2(k-2)^2>0, \end{cases}$$

解得

$$1-\sqrt{2}<k<1+\sqrt{2}，且 k\neq 0.$$

因此，当 $1-\sqrt{2}<k<1+\sqrt{2}$，且 $k\neq 0$ 时，直线与抛物线有两个公共点.

(2) 直线与抛物线有一个公共点，则必须方程①有一个解，因此

$$\begin{cases} k^2=0, \\ k^2-2k-2\neq 0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} k^2\neq 0, \\ 4(k^2-2k-2)^2-4k^2(k-2)^2=0, \end{cases}$$

解得

$$k=0 或 k=1\pm\sqrt{2}.$$

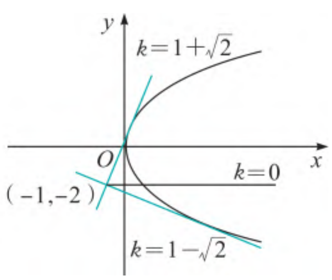


图 3-21

因此，当 $k=0$ 或 $k=1\pm\sqrt{2}$时，直线与抛物线仅有一个公共点(如图 3-21).

(3) 直线与抛物线没有公共点，则必须方程①无实数解. 显然 $k^2=0$ 不合要求，因此

$$\begin{cases} k^2\neq 0, \\ 4(k^2-2k-2)^2-4k^2(k-2)^2<0, \end{cases}$$

解得

$$k<1-\sqrt{2} \text{或} k>1+\sqrt{2}.$$

因此，当 $k<1-\sqrt{2}$ 或 $k>1+\sqrt{2}$ 时，直线与抛物线没有公共点.

## 练习

**1.** 求适合下列条件的抛物线方程：

(1) 顶点在原点，关于 $x$ 轴对称，并且经过点 $M(5, -4)$；

(2) 顶点在原点，对称轴为坐标轴，且经过点 $P(-3, 2)$.

**2.** 求焦点是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左焦点，顶点是椭圆的中心的抛物线方程.

**3.** 抛物线的顶点是双曲线 $16x^2-9y^2=144$ 的中心，而焦点是双曲线的右顶点，求此抛物线的方程.

**4.** 已知动圆 $M$ 经过点 $A(3, 0)$，且与直线 $l$：$x=-3$ 相切，求动圆圆心的轨迹方程.

## 习题 3.3

**1.** 根据下列条件，求抛物线的标准方程：

(1) 焦点 $F$ 的坐标是 $(0, -1)$；　　(2) 准线方程是 $x=-2$；

(3) 焦点到准线的距离是 2；　　(4) 经过点 $A(-2, 4)$.

**2.** 抛物线 $y^2=-2px$ $(p>0)$ 上有一点 $M$ 的横坐标为 $-9$，它到焦点的距离为 10，求抛物线方程和点 $M$ 的坐标.

**3.** 若抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 上一点 $P$ 到准线及对称轴的距离分别是 10 和 6，求点 $P$ 的横坐标及抛物线方程.

**4.** 若抛物线的顶点在原点，它的准线经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的一个焦点，并垂直于椭圆的两个焦点所在直线，且抛物线的准线与椭圆有一个交点为 $M\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$. 分别求椭圆与抛物线的方程.

**5.** 若抛物线通过直线 $y=x$ 与圆 $x^2+y^2+6x=0$ 的交点，且以原点为顶点，坐标轴为对称轴，求其标准方程.

**6.** 平面上动点 $P$ 到点 $A(0, 2)$ 的距离比它到直线 $l$：$y=-4$ 的距离小 2，求动点 $P$ 的轨迹方程.

**7.** 已知点 $P$，$Q$ 分别为抛物线 $y^2=-3x$ 与 $y^2=\frac{x}{2}$ 上的点. 设点 $P$，$Q$ 的坐标分别为 $(x_1, y_1)$，$(x_2, y_2)$，并且 $y_1=3y_2$，求线段 $PQ$ 的中点 $M$ 的轨迹方程.

## 信息技术链接

### 离心率 $e$ 与圆锥曲线

打开 GeoGebra，进行下述实验.

1. 创建滑动条，定义参数 $e$，绘制定点 $F$ 和定直线 $l$，并注意调整参数 $e$ 的变化范围（如图 1）.


图 1

2. 作点的轨迹——圆锥曲线.

（1）使用“描点”工具在直线 $l$ 上绘制任意一点 $M$，使用“垂线”工具过点 $M$ 作 $l$ 的垂线，再在该垂线上绘制任意一点 $C$，使用“平行线”工具过点 $C$ 作直线 $l$ 的平行线 $l'$.

（2）使用“位似”工具依次点选位似变换对象点 $C$ 和位似中心点 $M$，输入位似比“$e$”，得到点 $N$. 使用“线段”工具构造线段 $MN$. 最后使用“圆规（半径与圆心）”工具，依次点选线段 $MN$ 和点 $F$，构造圆 $F$.

（3）调整点 $C$ 的位置，使得到的圆 $F$ 与直线 $l'$ 有两个交

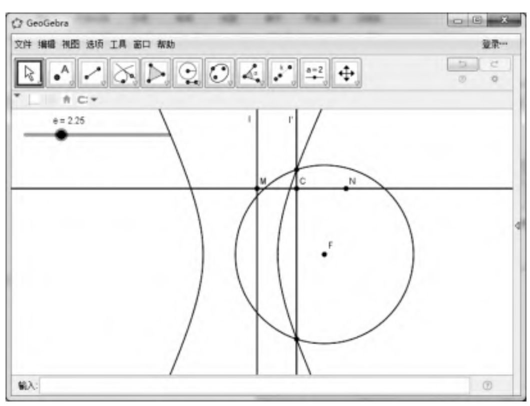



图 2

点．使用“描点”工具描绘这两个交点，使用“轨迹”工具，依次点选其中一个交点和点 $C$，得到这个交点的轨迹，使用同样的方法得到另外一个交点的轨迹（如图 2）．

3．研究离心率 $e$ 对圆锥曲线的类型和形状的影响．

（1）为了方便观察，隐藏一些无关的图形元素，得到的图形如图 3 所示．

（2）拖动滑动条，改变 $e$ 的大小，观察 $e$ 对圆锥曲线的类型和形状的影响．

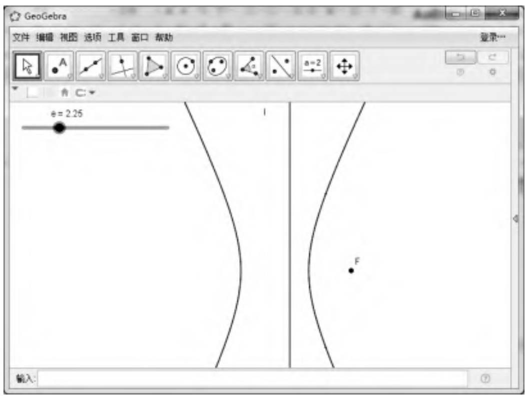



图 3



## 3.4 圆锥曲线的简单应用

天体在宇宙中的运动，无处不存在圆锥曲线的身影．在我们的生活中，也处处存在着圆锥曲线及圆锥曲线的应用．

**例 1** 2005 年 10 月 12 日 9 时整，我国神舟六号载人飞船腾空而起，9 时 10 分进入预设轨道，10 月 17 日 4 时 33 分返回舱安全着陆．已知飞船在前五圈的飞行轨道是以地心 $F_2$ 为一个焦点的椭圆（如图 3-22），它的近地点 $A$（离地面最近的点）距地面 200.0 km，远地点 $B$（离地面最远的点）距地面 347.0 km，地球半径约为 6 371.0 km，求该飞船运行的轨道方程（精确到 0.1 km）．

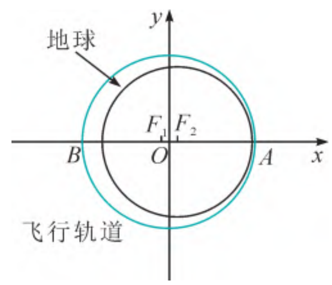



图 3-22

**解** 由点 $A$，$B$ 分别为椭圆长轴的两个端点，如图 3-22 所示建立平面直角坐标系，使点 $A$，$B$，$F_2$ 在 $x$ 轴上，点 $F_2$ 为椭圆的右焦点.

因为椭圆的焦点在 $x$ 轴上，所以设它的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0).$$

这时

$$\begin{aligned}a-c&=|OA|-|OF_2|\\&=|F_2A|\\&=6\ 371.0+200.0\\&=6\ 571.0,\\a+c&=|OB|+|OF_2|\\&=|F_2B|\\&=6\ 371.0+347.0\\&=6\ 718.0,\end{aligned}$$

解得

$$a=6\ 644.5(\text{km}),\ c=73.5(\text{km}).$$

所以

$$\begin{aligned}b^2&=a^2-c^2\\&=(a+c)(a-c)\\&=6\ 718.0\times 6\ 571.0,\end{aligned}$$

即 $$b\approx 6\ 644.1(\text{km}).$$

因此，此时飞船的轨道方程是

$$\frac{x^2}{6\ 644.5^2}+\frac{y^2}{6\ 644.1^2}=1.$$

**例2** 双曲线型冷却塔的外形是双曲线的一部分绕其虚轴旋转所成的曲面（如图 3-23），它的最小半径为 12 m，上口半径为 13 m，下口半径为 25 m，高为 55 m. 选择适当的坐标系，求此双曲线的方程（精确到 1 m）.

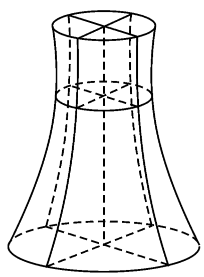


图 3-23

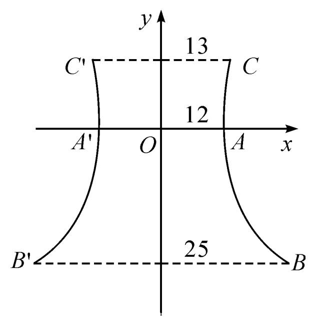



图 3-24

**解** 如图 3-24，建立平面直角坐标系 $xOy$，使最小圆的直径 $AA'$ 在 $x$ 轴上，圆心与原点重合. 这时，上口、下口的直径 $CC'$，$BB'$ 平行于 $x$ 轴.

设双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).$$

由题设条件知：$a=12$，且可设点 $C$ 的坐标为 $(13,\ y)$，点 $B$ 的坐标为 $(25,\ y-55)$.

因为点 $B$，$C$ 在双曲线上，所以

$$\begin{cases}\dfrac{25^2}{12^2}-\dfrac{(y-55)^2}{b^2}=1, & ①\\[2ex] \dfrac{13^2}{12^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1. & ②\end{cases}$$

由②得

$$y=\frac{5b}{12}\ \text{（负值已舍去）}.$$

将 $y=\dfrac{5b}{12}$ 代入方程①，并化简得

$$19b^2+275b-18\ 150=0. \qquad ③$$

解方程③，注意到 $b>0$，得 $b\approx 25\,(\mathrm{m})$.

所以，所求双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{625}=1.$$

第 3 章 圆锥曲线的方程

**例3** 某河上有一座抛物线形拱桥，当水面距拱顶 5 m 时，水面宽 8 m．一木船宽 4 m，高 2 m，载货后木船露在水面上的部分高为$\frac{3}{4}$ m．如图 3-25 所示，问：要使木船能从桥下通过，水面至少与抛物线拱顶相距多少米?

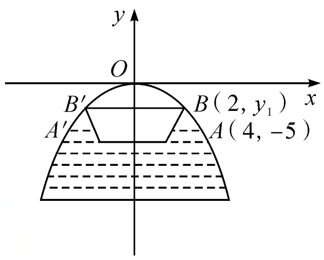



图 3-25

**解** 如图 3-25 所示建立平面直角坐标系，由题设知点 $A(4,\ -5)$在抛物线 $x^2=-2py$ $(p>0)$上．所以

$$4^2=-2p\cdot(-5),$$

解得 $p=1.6$．所以拱桥所在抛物线的方程为

$$x^2=-3.2y.$$

设当水面上涨到与抛物线拱顶相距 $h$ m 时，船恰能从桥下通过，这时船两侧与抛物线拱接触．于是可设船面 $BB'$的端点 $B$ 的坐标为$(2,\ y_1)$．则有

$$2^2=-3.2y_1,$$

解得 $y_1=-\frac{5}{4}$．所以

$$\begin{aligned}h&=|y_1|+\frac{3}{4}\\&=\left|-\frac{5}{4}\right|+\frac{3}{4}\\&=2.\end{aligned}$$

所以，要使木船能从桥下通过，水面至少与抛物线拱顶相距 2 m.

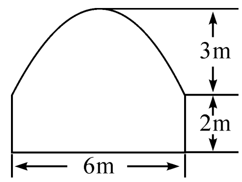
## 练习

**1.** 我国发射的第一颗人造地球卫星的运行轨道是以地心 $F$ 为一个焦点的椭圆．已知它的近地点 $A$ 距地面 439 km，远地点 $B$ 距地面 2 384 km，地球半径约为 6 371 km．求卫星运行的轨道方程(精确到 1 km)．

**2.** 探照灯反射镜的轴截面是抛物线的一部分，光源位于抛物线的焦点处．已知灯口直径为 60 cm，灯深 40 cm，求抛物线的标准方程和焦点位置.

## 习题 3.4

1. 2003 年 12 月 31 日凌晨，我国与欧洲空间局合作研制的“探测一号”卫星在我国自行研制的“长征二号丙”运载火箭的托举下，从西昌卫星发射中心顺利升空. 至此，中国地球“双星”探测计划揭开了它神秘的面纱. 已知“探测一号”卫星运行轨道是接近赤道平面上的一个以地心为一个焦点的椭圆，近地点距地面 555 km，远地点距地面 78 051 km. 求此轨道的方程. （地球半径约为 6 371 km.）
2. 已知地球运行的轨道是长半轴长 $a$ 为 $1.50\times108$ km、离心率 $e$ 为 0.019 2 的椭圆，且太阳在这个椭圆的一个焦点上，求地球到太阳的最大和最小距离.
3. 在相距 1 400 m 的 $A$，$B$ 两哨所，若听到炮弹爆炸声的时间相差 3 s，且声速是 340 m/s，求炮弹爆炸点所在曲线的方程.
4. 某隧道横断面由抛物线及矩形的三边组成，尺寸如图所示. 某卡车空车时能通过此隧道. 现载一集装箱，箱宽 3 m，车与箱共高 4.5 m. 此车能否通过隧道？请说明理由.



（第 4 题图）

## 阅读与讨论

### 圆锥曲线与光学

过去，珠宝匠和纺织工经常用一个盛满水的球形玻璃球来放大他们的作品（如图 1），但只有位于玻璃球中心部分的图像是有用的，其他部分的图像发生了变形，直线变成了曲线，这种现象称为球面像差.

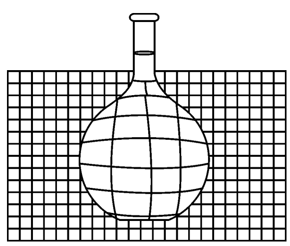


图 1　用盛满水的球形玻璃瓶做放大镜

在 13 世纪，罗吉尔·培根想到，既然只有图像的中心部分不变形，完全可以把球的其他部分去掉. 在试验过程中培根发现，球中的水也可以去掉，只留下一块两面都是球面的玻璃就可以了. 这个发现促成了透镜的发明，也使得望远镜和显微镜的发明成为可能.

苏格兰数学家詹姆斯·格里高利在 1661 年发明了第一部反射式望远镜. 他在研究圆锥曲线时发现，用圆锥曲线制造光

学反射镜可以解决球面像差的问题. 如图 2，格里高利望远镜由两个反射镜和一个透镜组成. 一个抛物面的大凹面镜收集光线并把光线反射给一个椭圆面凹面镜，第二个凹面镜再把光线反射给透镜. 在第一个凹面镜中间有一个小孔，透镜位于小孔后，观测者通过透镜可以看到图像.

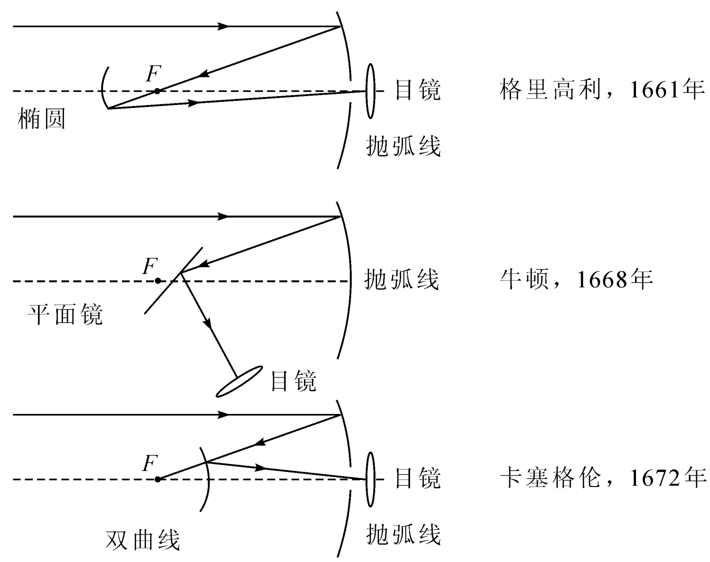



图 2　三种反射式望远镜的设计，都以圆锥曲线做反射镜

格里高利望远镜的设计相当精妙，但是在实际应用中受到制造工艺的限制.

几年以后，牛顿在 1668 年发明了一具略微不同的望远镜，他的设计也采用了抛物面反射镜(如图 2). 在牛顿的设计中，第二个反射镜换成了平面镜（平面镜的制造工艺比较简单，可以达到很高的精度)，图像被投射到望远镜的目镜上. 1672 年牛顿在伦敦皇家学会展示了他的望远镜的另一个模型，皇家学会的会员们深感震惊，就在那次会议上决定吸纳牛顿为会员. 由于牛顿望远镜的设计非常简单，直到今天在天文学爱好者中牛顿望远镜依然流行.

同年稍晚，卡塞格伦发表了他的设计(如图 2). 卡塞格伦也采用抛物面凹面镜作为第一个反射镜，但是第二个反射镜采用双曲面的凸面镜，双曲面的一个焦点与抛物面的焦点重合. 在第一个反射镜中央有一个小孔，图像在这里汇聚，这一点与格里高利望远镜的设计相同.

卡塞格伦的设计非常合理，用一个凹面镜和一个凸面镜组

合对于消除两个镜面的误差都有帮助．今天，各大天文台的望远镜大都采用卡塞格伦的设计．

17 世纪设计望远镜的热潮是笛卡尔和费马发明解析几何的直接后果．解析几何诞生之后，人们不必再猜测某种曲面反射镜的光学性质，甚至在这种曲面反射镜被实际制造出来之前，人们就可以用代数方法研究其光学性质．解析几何可以解释为什么球面反射镜不能产生清晰的图像，而抛物面反射镜却可以．椭圆面反射镜和双曲面反射镜如何创造性地与抛物面反射镜结合，这个问题也可以用解析几何这种数学工具分析．由于解析几何的出现，圆锥曲线不再仅仅是抽象的数学研究对象，人们在实际应用中找到了它的位置．

**讨论题**

请查阅资料，进一步了解圆锥曲线的光学性质及圆锥曲线在天文学等方面的应用．

## 课题学习

### 信息技术应用

——轨迹的探求

**课题**：$C$ 是半径为 $r$ 的定圆 $A$ 内的一定点，$D$ 是圆上的一动点，过线段 $CD$ 的中点 $E$ 作 $CD$ 的垂线，与半径 $AD$ 的交点为 $F$，求 $F$ 的轨迹．

**目的**：通过实验（动画模拟）现象的观察，了解探求动点轨迹的途径与一般方法．

**工具**：计算机、GeoGebra 软件．

**思路**：从问题出发→实验观察→发现问题→直觉猜想→逻辑论证．

**一、实验步骤：**

1. 新建一个 GeoGebra 绘图，在绘图区的空白位置使用“圆（圆心与一点）”工具绘制圆 $A$，使圆心为点 $A$，在圆 $A$ 内任取一点 $C$，同时在圆 $A$ 上任取一点 $D$；

2. 使用“线段”工具绘出线段 $CD$，使用“直线”工具绘出点 $A$ 和点 $D$ 所在的直线 $k$；

3. 使用“中垂线”工具，点击线段 $CD$，得到其中垂线 $l$；

4. 使用“交点”工具绘制直线 $l$ 和 $k$ 的交点 $F$；

（猜想一下，当点 $D$ 在圆上运动时，点 $F$ 的轨迹是什么曲线？）

5. 使用“轨迹”工具，依次点选点 $F$ 和点 $D$，得到点 $F$ 的轨迹，通过观察可以得出点 $F$ 的轨迹是一个椭圆；

6. 在圆 $A$ 内拖动点 $C$（注意不要超过圆的边界），观察椭圆形状的变化.

**二、理论证明：**

因为 $|FC|=|FD|$，而 $|FA|+|FC|=|FA|+|FD|=r$（$r$ 为半径是定值），因 $C$ 在圆内，所以 $|AC|<|AD|=r$，由椭圆定义知，$F$ 的轨迹是以 $A$，$C$ 为焦点，$r$ 为长轴长的椭圆.（椭圆方程略）

**思考题**

**1.** 将线段 $AD$ 改为直线. 设 $AD$ 交圆于另一点 $G$，过 $CG$ 的中点 $H$ 作 $CG$ 的垂线 $l$，与线段 $AG$ 交于点 $Q$，则点 $Q$ 显然在椭圆上. 设直线 $EF$，$HQ$ 交于点 $I$，观察 $I$ 的轨迹是什么？

**2.** 将课题中的“点 $C$ 在圆内”这一条件改为“点 $C$ 在圆外”，其余条件不变，再观察实验现象变化，你又能得到什么样的轨迹？

# 复习题

## A 组

1. 椭圆 $mx^2+ny^2=-mn$（$m<n<0$）的焦点坐标是（　　）.

(A) $(0, \pm\sqrt{m-n})$　　(B) $(\pm\sqrt{m-n}, 0)$

(C) $(0, \pm\sqrt{n-m})$　　(D) $(\pm\sqrt{n-m}, 0)$

2. 在一椭圆内，以焦点 $F_1$，$F_2$ 为直径两端点的圆恰好过短轴的两顶点，求此椭圆的离心率 $e$.

3. 过双曲线的一个焦点 $F_1$ 作垂直于实轴的弦 $PQ$，若 $F_2$ 是另一焦点，且 $\angle PF_2Q=90°$，求此双曲线的离心率.

4. 已知点 $M$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{48}=1$ 上的点，点 $F_1$，$F_2$ 分别是此椭圆的左、右焦点. 若 $|MF_1|=3|MF_2|$，求点 $M$ 的坐标.

5. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{(m-1)^2}=1$ 的准线平行于 $x$ 轴，求实数 $m$ 的取值范围.

6. 过点 $M(-2, 0)$ 的直线 $l$ 与椭圆 $x^2+2y^2=2$ 交于 $P_1$，$P_2$ 两点，线段 $P_1P_2$ 的中点为 $P$. 设直线 $l$ 的斜率为 $k_1(k_1\neq 0)$，直线 $OP$ 的斜率为 $k_2$，求 $k_1\cdot k_2$ 的值.

7. 已知直线 $y=kx+1$ 与焦点在 $x$ 轴上的椭圆 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 总有公共点，求 $m$ 的取值范围.

8. 若椭圆 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1$（$m>n>0$）和双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）有相同的焦点 $F_1$，$F_2$，点 $P$ 是这两条曲线的交点，求 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的值（用 $m$，$a$ 表示）.

9. 已知双曲线与椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 有公共焦点，它们的离心率之和为 $\dfrac{14}{5}$，求双曲线的方程.

10. 已知点 $F_1$，$F_2$ 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的焦点，过点 $F_2$ 作垂直于 $x$ 轴的直线交双曲线于点 $P$，且 $\angle PF_1F_2=30°$，求双曲线的渐近线方程.

11. 一动圆与圆 $(x+2)^2+y^2=2$ 相切，且经过定点 $A(2, 0)$，求动圆圆心 $M$ 的轨迹方程.

12. 已知抛物线的方程为 $y^2=8x$，双曲线的焦点在 $x$ 轴上且渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$. 椭圆的中心在原点，一个焦点与抛物线的焦点重合，离心率为上述双曲线的离心率的倒数，求椭圆的方程.

13. 已知 $A$，$B$ 是抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）上两点，点 $O$ 为坐标原点. 若 $|OA|=|OB|$，且 $\triangle AOB$ 的垂心恰是此抛物线的焦点. 求直线 $AB$ 的方程.

14. 设抛物线 $y=ax^2$（$a>0$）与直线 $y=kx+b$ 有两个公共点，其横坐标分别是 $x_1$，$x_2$，而 $x_3$ 是直线 $y=kx+b$ 与 $x$ 轴交点的横坐标. 求证：$x_1x_2=x_1x_3+x_2x_3$.

15. 给出定点 $A(1, 0)$ 和直线 $l$：$x=-1$，点 $B$ 是直线 $l$ 上的动点，$\angle BOA$ 的平分线交 $AB$ 于点 $C$，求点 $C$ 的轨迹方程.

## B 组

**1.** 已知 $0^\circ\leqslant\alpha\leqslant180^\circ$，当 $\alpha$ 变化时，方程 $x^2\sin\alpha+y^2\cos\alpha=1$ 分别表示什么曲线？

**2.** 两定点的坐标分别为 $A(-1,\ 0)$，$B(2,\ 0)$，动点 $M$ 满足条件 $\angle MBA=2\angle MAB$，求动点 $M$ 的轨迹方程.

**3.** 过抛物线 $x^2=4ay$（$a>0$）的焦点 $F$ 作直线交抛物线于 $A$，$B$ 两点．设 $\triangle AOB$ 的面积为 $S$（$O$ 为原点），求证：$S^2:|AB|=a^3$.

**4.** 在椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上求一点 $P$，使它到定点 $Q(0,\ 1)$ 的距离最大.

**5.** 已知抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的一条过焦点的弦 $AB$ 被焦点 $F$ 分成长为 $m$，$n$ 的两部分．求证：$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{2}{p}$.

**6.** 已知椭圆的一个焦点为点 $F_1(0,\ -2\sqrt{2})$，且离心率 $e$ 满足：$\dfrac{2}{3}$，$e$，$\dfrac{4}{3}$ 成等比数列.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）是否存在直线 $l$，使 $l$ 与椭圆交于不同的两点 $M$，$N$，且线段 $MN$ 被直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 平分？若存在，求出 $l$ 的倾斜角 $\alpha$ 的范围；若不存在，说明理由.

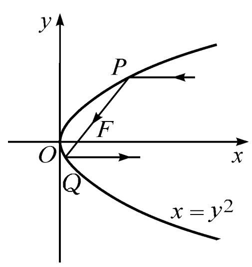
## 思考与实践

**1.** 举出日常生活及生产中应用圆锥曲线的实例.

**2.** 用抛物线的定义证明二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图形是抛物线.

**3.** 已知探照灯的轴截面是抛物线 $x=y^2$．右图显示了平行于对称轴 $y=0$（即 $x$ 轴）的光线在抛物线上的点 $P$，$Q$ 的反射情况．设点 $P$ 的纵坐标为 $a$（$a>0$）．当 $a$ 取何值时，从入射点 $P$ 到反射点 $Q$ 的光线的路程 $PQ$ 最短？

**4.** 我们把椭圆、双曲线和抛物线统称为圆锥曲线．试根据课文中关于椭圆、双曲线、抛物线的有关性质，给出圆锥曲线的统一定义.




（第 3 题图）

# 后　　记

为了全面贯彻党的教育方针，适应时代发展的需要，为学生的终身发展奠定基础，依据《普通高中数学课程标准（2017 年版）》，我们组织专家学者编写了这套普通高中数学教科书.

在本套教科书的编写过程中，我们得到了许多数学教育界前辈、数学课程专家、数学教育理论工作者、中学数学教研员和教师的大力支持和热情帮助，我们对他们的辛勤付出表示衷心的感谢. 我们还要特别感谢华中师范大学数学与统计学学院对本套教科书编写工作的高度重视和大力支持.

本套教科书是全体编写人员集体智慧的结晶. 除已列出的主要编写者外，参加本册教科书编写讨论的还有：郭熙汉、彭树德、高保中、岑爱国、罗国彬、徐新斌、李建国、汪伯林、邵贵明、余晓娟、林子植、张琴、田杰等.

我们还要感谢使用本套教科书的师生们，期待你们在使用本套教科书的过程中，及时把意见和建议反馈给我们，以便我们进一步修改完善.

**责任编辑**　张　琴　孙　昕
**封面设计**　牛　红　刘静文

**普通高中教科书　数学　选择性必修　第一册**

| | | |
|---|---|---|
| 出　版 | 湖北教育出版社 | 430070　武汉市雄楚大街 268 号 |
| 经　销 | 新　华　书　店 | |
| 网　址 | http://www.hbedup.com | |
| 印　刷 | 武汉中远印务有限公司 | |
| 开　本 | 890mm×1240mm　1/16 | |
| 印　张 | 8.5 | |
| 字　数 | 170 千字 | |
| 版　次 | 2019 年 11 月第 1 版 | |
| 印　次 | 2019 年 11 月第 1 次印刷 | |
| 书　号 | ISBN 978-7-5564-3144-1 | |
| 定　价 | 8.00 元 | |


版权所有,盗版必究
(图书如出现印装质量问题,请联系 027-83637493 进行调换)

YOUJ
365优教
大学生共享家教联盟

致力于用榜样的力量提升学生成绩的共享家教平台
中国家庭教育学会荣誉会员单位

985/211大学生
1对1上门辅导

找家教就像叫“代驾”一样简单
家长们都在偷偷用的家教预约神器

记得拍照留存哦
扫码关注 预约上门
关注送200元优惠券

小初高全科辅导
学霸云集任您挑
学历真实可担保

与优秀大学生同行，激发孩子无限潜能

微信搜索公众号：365优教网
咨询热线：4000—711—365

YOUJ优教
既是找老师，更是找榜样
家教老师全国招募中