国家教材委员会专家委员会审核通过 2019

普通高中教科书

数学

SHU XUE

选择性必修

第一册

江蘇鳳凰教育出版社
Phoenix Education Publishing, Ltd

普通高中教科书

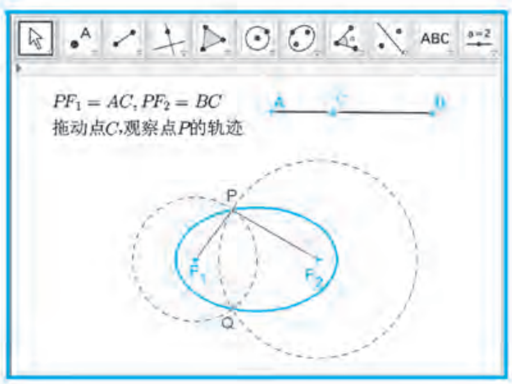
数学

SHU XUE

选择性必修

第一册

苏教版高中数学教材编写组 编著



江蘇鳳凰教育出版社
Phoenix Education Publishing, Ltd

主　　编　单　墫　李善良

副 主 编　葛　军　徐稼红　石志群

本册主编　樊亚东

编写人员　孙旭东　张松年　葛　军　徐稼红　樊亚东　李善良
　　　　　祁建新　石志群　仇炳生　张乃达　单　墫

责任编辑　田　鹏

普通高中教科书
书　　名　数学(选择性必修第一册)
主　　编　单　墫　李善良
责任编辑　田　鹏
出版发行　江苏凤凰教育出版社(南京市湖南路 1 号 A 楼　邮编 210009)
照　　排　南京展望文化发展有限公司
印　　刷　江苏凤凰扬州鑫华印刷有限公司(电话：0514-85868855)
厂　　址　扬州市江阳工业园蜀岗西路 9 号(邮编：225008)
开　　本　890 毫米×1240 毫米　1/16
印　　张　14.25
版　　次　2021 年 4 月第 1 版
印　　次　2021 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5499-9163-1
定　　价　12.86 元
盗版举报　025-83658579

苏教版图书若有印装错误可向出版社联系调换
质量热线：025-83658528　025-83658526

大自然这本书是用数学语言写成的.

——伽利略

一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到完善的地步.

——马克思

致 同 学

亲爱的同学,高中阶段的数学学习生活有趣吗?

我们知道,数学是高中阶段的重要学科,不仅是学习物理、化学等学科的基础,而且可以帮助我们认识世界,改造世界,创造新的生活,对我们的终身发展有较大的影响.

怎样学习数学?

第一,要学会发现问题、提出问题. 面对各种情境(生活的、数学的、科学的),我们需要学会观察、实验、归纳,学会从特殊到一般、从具体到抽象、从模糊到清晰,大胆地提出数学问题.

第二,要尝试分析并解决所提出的问题. 通过抽象、推理、建模、运算等多种活动,建立数学理论,并运用这些数学理论去解决问题.

第三,要学会回顾反思. 在解决完问题之后,要思考:我们是如何解决这个问题的,从中可以得到哪些启发,还能提出哪些问题.

在数学学习过程中,我们要主动地学习数学基础知识、基本技能,自觉地感悟基本数学思想,不断积累数学活动经验,提升数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析等核心素养,并逐步学会用数学眼光观察世界、用数学思维思考世界、用数学语言表达世界.

通过数学学习,我们会发现数学非常奇妙,非常有趣. 数学将给我们以新奇和动力,我们的思维水平会不断提高,我们的创造能力会得到发展. 我们将快乐地成长.

考虑广大同学的不同需要，本书提供了较大的选择空间.

书中的引言、正文、练习、习题中的“感受·理解”部分、阅读、本章回顾、本章测试等内容构成一个完整的体系. 它体现了教科书的基本要求，是所有学生应当掌握的内容，相信你一定能学好这部分内容.

本书还设计了一些具有挑战性的内容，包括思考、探究、链接、问题与探究、应用与建模，以及习题中的“思考·运用”“探究·拓展”等. 在掌握基本内容之后，选择其中一些内容作思考与探究，相信你会更加喜欢数学.

目　　录

本书部分常用符号

k_l（或 k_{AB}）	直线 l 的斜率（或直线 AB 的斜率）
AB 或 $\|AB\|$	线段 AB 的长度
直线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$	两条直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 和 $y=-\dfrac{b}{a}x$
曲线 C：$f(x,y)=0$	曲线 C，它的方程是 $f(x,y)=0$，方程是 $f(x,y)=0$ 的曲线 C
a_n	数列$\{a_n\}$的第 n 项
S_n	数列的前 n 项和
Δx	自变量 x 的增量
Δy	函数 y 的增量
$f'(x_0)$	函数 $f(x)$在 x_0 处的导数
$f'(x)$	函数 $f(x)$的导函数
y'	函数 y 的导函数

第 1 章　直线与方程

- 直线与方程
  - 直线的斜率与倾斜角
  - 直线的方程
    - 直线的点斜式方程
    - 直线的两点式方程
    - 直线的一般式方程
  - 两条直线的平行与垂直
  - 两条直线的交点
  - 平面上的距离
    - 平面上两点间的距离
    - 点到直线的距离

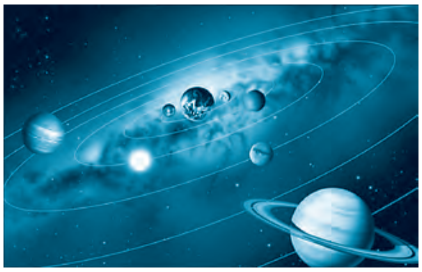
如果代数与几何各自分开发展，那么它的进步将十分缓慢，而且应用范围也很有限. 但若两者互相结合而共同发展，则会相互加强，并以快速的步伐向着完美化的方向猛进.

——拉格朗日

现实世界中，到处有美妙的曲线，从飞逝的流星到雨后的彩虹，从古代的石拱桥到现代的立交桥……

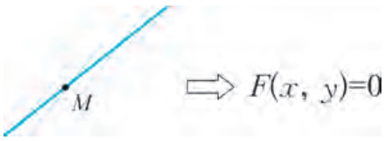
行星围绕太阳运行，人们可以建立行星运动的轨迹方程，并借助方程进一步认识它的运动规律.

在建造桥梁时，我们可以根据要求，首先确定桥拱所对应的曲线的方程，然后进行进一步的设计和施工.



曲线可以看成满足某种条件的点的集合. 引进平面直角坐标系后，平面内的点可以用坐标 $(x,\ y)$ 来表示. 根据曲线的几何特征，可以得到曲线上任意一点的坐标 $(x,\ y)$ 满足的一个方程 $F(x,\ y)=0$；反过来，以方程 $F(x,\ y)=0$ 的解 $(x,\ y)$ 为坐标的点也都在曲线上. 这样，对曲线性质的研究就可以通过对方程 $F(x,\ y)=0$ 的研究来进行.

直线是最常见的几何图形，直线也可以看成满足某种条件的点的集合. 在平面直角坐标系中，当点用坐标 $(x,\ y)$ 表示后，直线便可用一个方程 $F(x,\ y)=0$ 表示，进而通过对方程的研究来研究直线.



- 如何建立直线的方程？
- 如何利用直线的方程研究直线的性质？

1.1 直线的斜率与倾斜角

我们知道，过一点可以画出无数条直线. 如图 1-1-1，过点 P 的两条直线 PA，PB 的区别在于它们的倾斜程度不同.

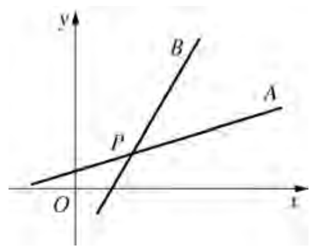


图 1-1-1

● 如何刻画直线的倾斜程度呢?

在实际生活中，楼梯或路面的倾斜程度可以用坡度来刻画(图 1-1-2).

坡度指坡面的铅直高度与水平宽度的比. 铁路坡度用千分率(‰)表示，公路坡度用百分率(%)表示.

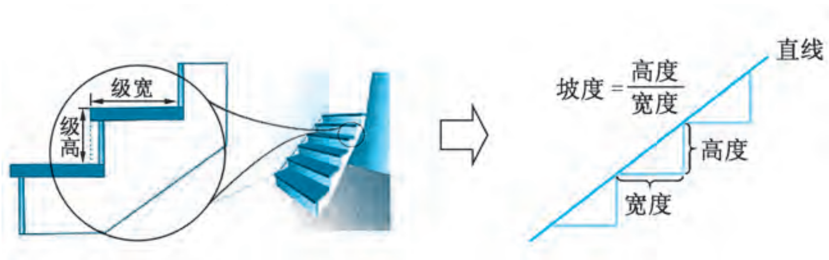


图 1-1-2

可以看出，如果楼梯台阶的高度(级高)与宽度(级宽)的比值越大，那么坡度就越大，楼梯就越陡.

在平面直角坐标系中，我们可以采用类似的方法来刻画直线的倾斜程度.

对于直线 l 上的任意两点 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，如果 $x_1 \neq x_2$ (图 1-1-3(1))，那么由相似三角形的知识可知，$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 是一个定值，我们将其称为直线 l 的**斜率**(slope).

$$k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad (x_1 \neq x_2).$$

如果 $x_1 = x_2$(图 1-1-3(2))，那么直线 l 的斜率不存在.

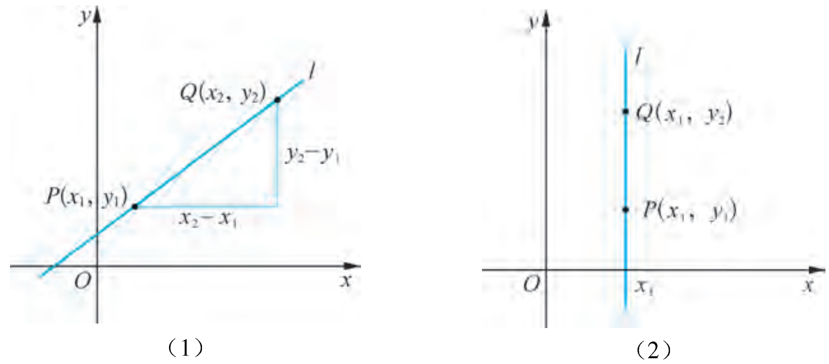


图 1-1-3

对于与 x 轴不垂直的直线 l，它的斜率也可以看作

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\text{纵坐标的增量}}{\text{横坐标的增量}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

例 1 如图 1-1-4，直线 l_1，l_2，l_3 都经过点 $P(3, 2)$，又 l_1，l_2，l_3 分别经过点 $Q_1(-2, -1)$，$Q_2(4, -2)$，$Q_3(-3, 2)$，试计算直线 l_1，l_2，l_3 的斜率.

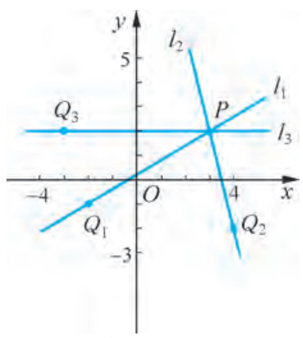


图 1-1-4

解 设 k_1，k_2，k_3 分别表示直线 l_1，l_2，l_3 的斜率，则

$$k_1=\frac{-1-2}{-2-3}=\frac{3}{5},\ k_2=\frac{-2-2}{4-3}=-4,\ k_3=\frac{2-2}{-3-3}=0.$$

由图 1-1-4 可以看出：

(1) 当直线的斜率为正时，直线从左下方向右上方倾斜；

(2) 当直线的斜率为负时，直线从左上方向右下方倾斜；

(3) 当直线的斜率为零时，直线与 x 轴平行或重合.

例 2 经过点(3, 2)画直线，使直线的斜率分别为

(1) $\frac{3}{4}$； (2) $-\frac{4}{5}$.

分析 要画出直线，只需再确定直线上另一个点的位置.

解 (1) 根据

$$\text{斜率}=\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

斜率为$\frac{3}{4}$表示直线上的任一点沿 x 轴方向向右平移 4 个单位长度，再沿 y 轴方向向上平移 3 个单位长度后仍在此直线上.

如果我们从点(3，2)开始，向右平移 4 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度，就得到点(7，5).

因此，通过点(7，5)和点(3，2)画直线，即为所求(图 1-1-5(1)).

(2) 由于 $-\frac{4}{5}=\frac{-4}{5}$，因此，将点(3，2) 先向右平移 5 个单位长度，再向下平移 4 个单位长度，得到点(8，−2). 通过点(8，−2) 和点(3，2) 画直线，即为所求(图 1-1-5(2)).

由于$-\frac{4}{5}=\frac{4}{-5}$，因此也可以将点(3，2)先向左平移 5 个单位长度，再向上平移 4 个单位长度，得到点(−2，6). 再通过点(−2，6)和点(3，2)画直线，即为所求. 还有其他作法吗？为什么？

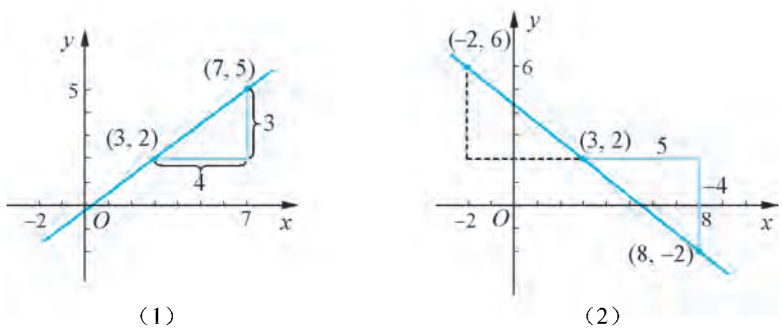


图 1-1-5

在平面直角坐标系中，对于一条与 x 轴相交的直线，把 x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到与直线重合时，所转过的最小正角 α 也能刻画直线的倾斜程度，我们把这个角 α 称为这条直线的**倾斜角**(angle of inclination)，并规定：

与 x 轴平行或重合的直线的倾斜角为 0.

由定义可知，直线的倾斜角 α 的取值范围是

$$\{\alpha \mid 0 \leqslant \alpha < \pi\}.$$

当直线的斜率为正时，直线的倾斜角为锐角(图 1-1-6(1))，此时，

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{NB}{AN}=\tan\alpha.$$

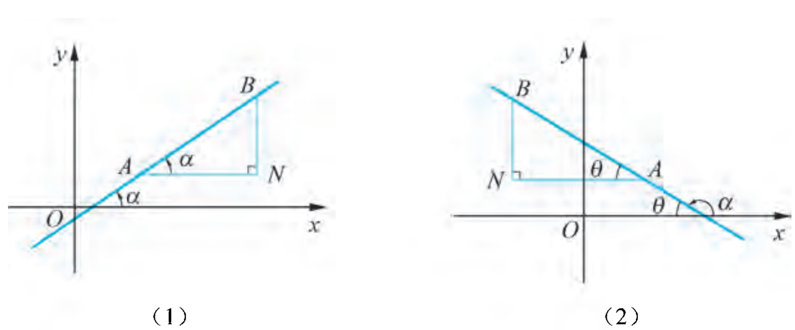


图 1-1-6

当直线的斜率为负时，直线的倾斜角为钝角（图 1 - 1 - 6(2)），此时，

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{NB}{-AN}=-\tan\theta=-\tan(\pi-\alpha)=\tan\alpha.$$

因此，当直线与 x 轴不垂直时，该直线的斜率 k 与倾斜角 α 之间的关系为

$$k=\tan\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right).$$

信息技术

在 GGB 中任画一条直线 AB，度量直线 AB 的斜率，以及直线 AB 与 x 轴形成的倾斜角 α（图 1 - 1 - 7）. 拖动点 B，观察斜率与倾斜角变化的规律.

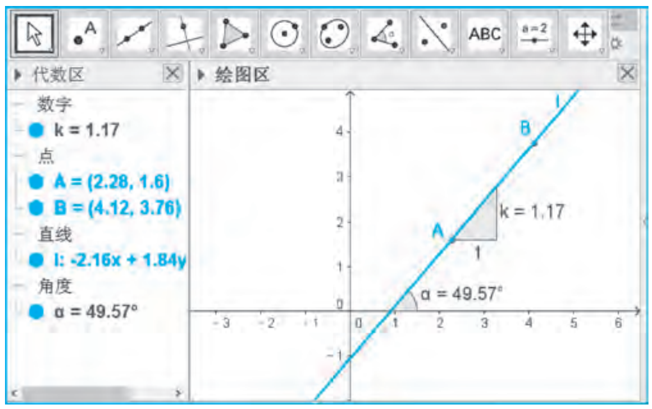


图 1 - 1 - 7

练　习

1. 分别求经过下列两点的直线的斜率：

(1) (2, 3), (4, 5)；　　(2) (−2, 3), (2, 1)；

(3) (−3, −1), (2, −1)；　　(4) (1, 0), (0, −2).

2. 分别求经过下列两点的直线的斜率和倾斜角：

(1) (−1, 2), (−2, 1)；　　(2) $(-1, 3)$, $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$；

(3) $(3, \sqrt{3})$, $(-2, \sqrt{3})$；　　(4) $(a+1, a-1)$, (a, a).

3. 设过点 A 的直线的斜率为 k，分别根据下列条件写出直线上另一点 B 的坐标（答案不唯一）：

(1) $k=4$, $A(1, 2)$；　　(2) $k=-2$, $A(-2, -3)$；

(3) $k=-\frac{3}{2}$, $A(2, -4)$；　　(4) $k=\frac{4}{3}$, $A(-3, 2)$.

4. 根据下列条件，分别画出经过点 P，且斜率为 k 的直线：

(1) $P(1, 2)$, $k=3$；　　(2) $P(2, 4)$, $k=-\frac{3}{4}$；

(3) $P(-1, 3)$, $k=0$；　　(4) $P(-2, 0)$，斜率不存在.

5. 分别判断下列三点是否在同一直线上：

(1) $(0, 2)$，$(2, 5)$，$(3, 7)$；

(2) $(-1, 4)$，$(2, 1)$，$(-2, 5)$；

(3) $(1, 2)$，$(1, 3)$，$(1, -1)$.

习题 1.1

感受・理解

1. 分别求经过下列两点的直线的斜率：

(1) $(-3, 2)$，$(2, -1)$；　(2) $(2, 0)$，$(0, -4)$；

(3) $(2, 1)$，$(3, 1)$；　(4) (a, a)，$(a-1, a+3)$.

2. 设 x，y 为实数，已知直线的斜率 $k=2$，且 $A(3, 5)$，$B(x, 7)$，$C(-1, y)$ 是这条直线上的三个点，求 x 和 y 的值.

3. (1) 当实数 m 为何值时，经过两点 $A(-m, 6)$，$B(1, 3m)$ 的直线的斜率是 12？

(2) 当实数 m 为何值时，经过两点 $A(m, 2)$，$B(-m, -2m-1)$ 的直线的倾斜角是 60°？

(3) 当实数 m 为何值时，经过两点 $A(1, m)$，$B(m-1, 3)$ 的直线的倾斜角是钝角？

4. 已知直线 l 上一点向右平移 4 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度后，仍在该直线上，求直线 l 的斜率 k.

5. 设 m 为实数，若 $A(1, 2)$，$B(3, m)$，$C(7, m+2)$ 三点共线，求 m 的值.

思考・运用

6. 已知 a，b，c 是两两不相等的实数，分别求经过下列两点的直线的倾斜角：

(1) $A(a, c)$，$B(b, c)$；　(2) $A(a, b)$，$B(a, c)$；

(3) $A(b, b+c)$，$B(a, c+a)$.

7. 设 m 为实数，过两点 $A(m^2+2, m^2-3)$，$B(3-m-m^2, 2m)$ 的直线 l 的倾斜角为 45°，求 m 的值.

8. 经过点 $P(0, -1)$ 作直线 l，且直线 l 与连接点 $A(1, -2)$，$B(2, 1)$ 的线段总有公共点，求直线 l 的倾斜角 α 和斜率 k 的取值范围.

探究・拓展

9. 如图，“坡度”常用来刻画道路的倾斜程度，这个词与直线的斜率有何关系？坡度为 4% 的道路很陡吗？调查一些山路或桥面的坡度，并与同学交流.

（第 9 题）

1.2 直线的方程

在平面直角坐标系中，若已知直线 l 上一点 $P_1(x_1, y_1)$ 和直线 l 的斜率 k，或者已知直线 l 上不同的两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，则直线 l 唯一确定.

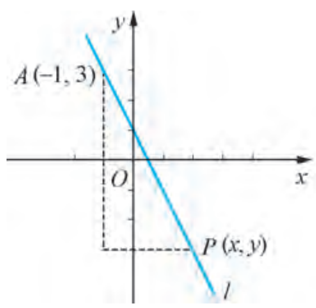
在上述两种情况下，当点 $P(x, y)$ 在直线 l 上运动时，点 P 的坐标应该满足某种关系.

● 如何得到直线 l 上点 $P(x, y)$ 的坐标 x，y 之间的关系？

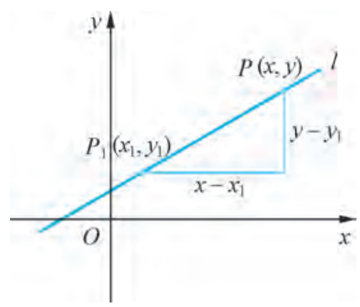
1.2.1 直线的点斜式方程

直线 l 经过点 $A(-1, 3)$，斜率为 -2(图 1-2-1(1)). 如果点 $P(x, y)$ 在直线 l 上运动，那么，

● x，y 满足什么关系？



(1)



(2)

图 1-2-1

当点 $P(x, y)$ 在直线 l 上运动时(除点 A 外)，点 P 与定点 $A(-1, 3)$ 所确定的直线的斜率恒等于 -2，

所以
$$\frac{y-3}{x-(-1)}=-2,$$

因此
$$y-3=-2[x-(-1)].$$

显然，点 $A(-1, 3)$ 的坐标也满足此方程.

因此，当点 P 在直线 l 上运动时，其坐标 (x, y) 满足方程

$$y-3=-2[x-(-1)],$$

即

$$2x+y-1=0.$$

反过来，若点 $P'(x', y')$ 的坐标满足方程 $2x+y-1=0$，即 $2x'+y'-1=0$.

当 $x'=-1$ 时，$y'=3$，此时点 P' 与点 A 重合，即点 P' 在直线 l 上.

当 $x'\neq-1$ 时，$y'-3=-2[x'-(-1)]$，即 $\dfrac{y'-3}{x'-(-1)}=-2$，这表明过点 P'，A 的直线的斜率为 -2，从而点 P' 在直线 l 上.

因此，以方程 $2x+y-1=0$ 的解为坐标的点 (x, y) 也都在直线 l 上.

综上，当点 P 在直线 l 上时，其坐标 (x, y) 满足方程 $2x+y-1=0$，并且以方程 $2x+y-1=0$ 的解 x，y 为坐标的点 (x, y) 都在直线 l 上. 这时，我们将方程 $2x+y-1=0$ 称为直线 l 的方程，也称直线 l 为方程 $2x+y-1=0$ 的直线.

一般地，当点 P 在曲线 C 上时，其坐标 (x, y) 满足方程 $F(x, y)=0$，并且以方程 $F(x, y)=0$ 的解为坐标的点 (x, y) 都在曲线 C 上. 这时，我们将方程 $F(x, y)=0$ 称为曲线 C 的方程，也称曲线 C 为方程 $F(x, y)=0$ 的曲线.

一般地，如果直线 l 经过点 $P_1(x_1, y_1)$，斜率为 k，那么，如何建立直线 l 的方程呢?

如图 1-2-1(2)，设直线 l 上任意一点 P 的坐标是 (x, y).

当点 $P(x, y)$（不同于点 P_1）在直线 l 上运动时，直线 PP_1 的斜率恒等于 k，即

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=k,$$

故

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad (*)$$

因为点 $P_1(x_1, y_1)$ 的坐标也满足方程 $(*)$，所以直线 l 上的每个点的坐标都是这个方程的解；反过来，可以验证，以方程 $(*)$ 的解为坐标的点都在直线 l 上. 因此，方程 $(*)$ 就是过点 P_1，斜率为 k 的直线 l 的方程.

方程

$$y-y_1=k(x-x_1)$$

叫作直线的**点斜式方程**(equation of point slope form).

当直线 l 与 x 轴垂直时，斜率不存在，其方程不能用点斜式表示. 但因为 l 上每一点的横坐标都等于 x_1，所以它的方程是

$$x=x_1.$$

例 1 已知一直线经过点 $P(-2, 3)$，斜率为 2，求这条直线的方程.

解 由直线的点斜式方程，得所求直线的方程为

$$y-3=2(x+2),$$

即

$$2x-y+7=0.$$

例 2 已知直线 l 的斜率为 k，与 y 轴的交点是 $P(0,\ b)$，求直线 l 的方程.

解 由直线的点斜式方程，得直线 l 的方程为

$$y-b=k(x-0),$$

即
$$y=kx+b.$$

我们把直线 l 与 y 轴的交点 $(0,b)$ 的纵坐标 b 称为直线 l 在 y 轴上的**截距**(intercept). 这个方程由直线 l 的斜率和它在 y 轴上的截距确定，所以这个方程也叫作直线的**斜截式方程**(equation of slope intercept form).

这说明，初中学习的一次函数 $y=kx+b$，它的图象确实是一条直线，其中常数 k 是直线的斜率，常数 b 就是直线在 y 轴上的截距.

探　究

在同一直角坐标系中作出直线

$$y=2,\ y=x+2,\ y=-x+2,\ y=3x+2,\ y=-3x+2,$$

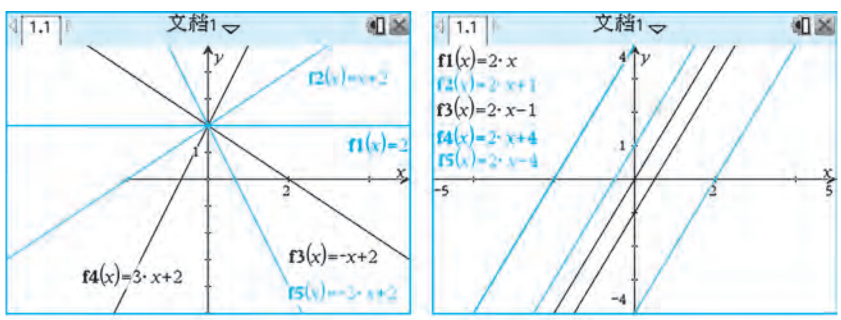
根据图 1-2-2(1)，你能推测直线 $y=kx+2$ 有什么特点吗?

尝试用计算器或计算机作出这些直线.

在同一直角坐标系中作出直线

$$y=2x,\ y=2x+1,\ y=2x-1,\ y=2x+4,\ y=2x-4,$$

根据图 1-2-2(2)，你能推测直线 $y=2x+b$ 有什么特点吗?



(1)　　(2)

图 1-2-2

练　习

1. 根据下列条件，分别写出直线的方程:

(1) 经过点 $(4,\ -2)$，斜率为 3;

(2) 经过点 $(3,\ 1)$，斜率为 $\frac{1}{2}$;

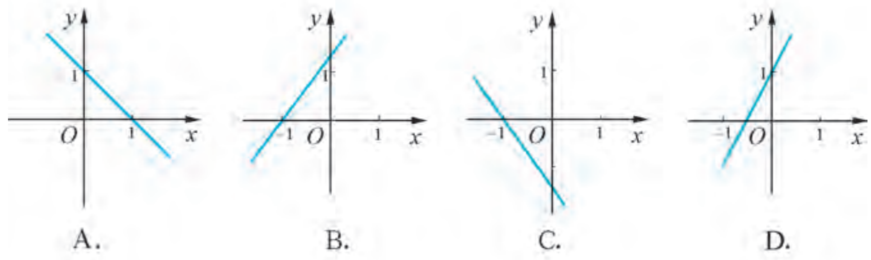
(3) 经过点 $(2,\ 0)$，斜率为 -1;

(4) 经过点 $(0,\ -1)$，斜率为 0;

(5) 斜率为 -2，在 y 轴上的截距为 -2;

(6) 斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，与 x 轴交点的横坐标为 -7.

2. 直线 $y=k(x+1)\ (k>0)$ 可能是(　　).



3. 根据下列条件，分别写出直线的方程：

(1) 过点 $P(-\sqrt{3}, 3)$，倾斜角为 $30°$；

(2) 过点 $P(-4, -3)$，倾斜角为 $135°$；

(3) 过点 $P(0, 4)$，倾斜角为 $0°$；

(4) 过点 $P(3, 2)$，倾斜角为 $90°$.

4. 已知直线 l_1：$y=-2x+3$. 直线 l_2 过点 $P(1,2)$，且它的斜率与直线 l_1 的斜率相等. 写出直线 l_2 的方程，并在同一直角坐标系中画出直线 l_1 和 l_2.

5. 分别写出经过下列两点的直线的方程：

(1) $P(1, 2)$，$Q(-1, 4)$；

(2) $P(1, 0)$，$Q(0, 2)$.

6. 任一条直线都可以用点斜式方程表示吗？斜截式方程可以改写成点斜式方程吗？

1.2.2 直线的两点式方程

若直线 l 经过两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，则直线 l 唯一确定. 那么，

● 如何建立直线 l 的方程呢？

如果 $x_1 \neq x_2$，那么直线 l 的斜率 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. 由直线的点斜式方程，得

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

当 $y_1 \neq y_2$ 时，方程可以写成

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

这个方程是由直线上两点确定的.

还有其他方法可以得到直线的两点式方程吗？

方程

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

叫作直线的**两点式方程**(equation of two-point form).

当 $y_1=y_2$ 时，由 $x_1\neq x_2$ 知直线 l 与 y 轴垂直，它的方程为 $y=y_1$.

如果 $x_1=x_2$，那么 $y_1\neq y_2$，直线 l 与 x 轴垂直，它的方程为 $x=x_1$.

思　考

(1) 方程 $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 的左、右两边各具有怎样的几何意义？它表示什么图形？

(2) 方程 $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 和方程 $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ 表示同一图形吗？

例 3　已知直线 l 经过两点 $A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$（图 1-2-3），其中 $a\neq0$，$b\neq0$，求直线 l 的方程.

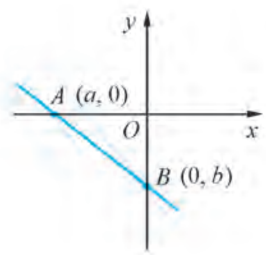


图 1-2-3

解　直线 l 经过两点 $A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$，其中 $a\neq0$，$b\neq0$，由直线的两点式方程，得直线 l 的方程为

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a},$$

即

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

当直线 l 经过原点时，l 在 x 轴和 y 轴上的截距都为 0.

我们把直线 l 与 x 轴的交点 $(a,0)$ 的横坐标 a 称为直线 l 在 x 轴上的截距，此时直线 l 在 y 轴上的截距为 b. 方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 由直线在 x 轴和 y 轴上的非零截距所确定，所以这个方程也叫作直线的**截距式方程**（equation of intercept form）.

例 4　已知三角形的顶点是 $A(-5,\ 0)$，$B(3,\ -3)$，$C(0,\ 2)$（图 1-2-4），分别求这个三角形三边所在直线的方程.

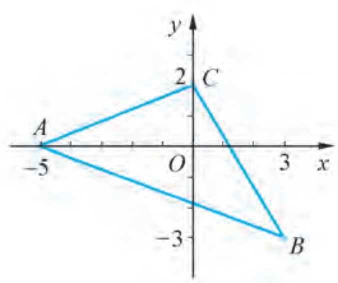


图 1-2-4

解 直线 AB 过 $A(-5, 0)$，$B(3, -3)$两点，由直线的两点式方程，得

$$\frac{y-0}{-3-0}=\frac{x-(-5)}{3-(-5)},$$

即
$$3x+8y+15=0,$$

这就是直线 AB 的方程.

直线 BC 在 y 轴上的截距为 2，斜率是

$$k=\frac{2-(-3)}{0-3}=-\frac{5}{3},$$

由直线的斜截式方程，得

$$y=-\frac{5}{3}x+2,$$

即
$$5x+3y-6=0,$$

这就是直线 BC 的方程.

直线 AC 在 x 轴、y 轴上的截距分别是-5，2，由直线的截距式方程，得

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{2}=1,$$

即
$$2x-5y+10=0,$$

这就是直线 AC 的方程.

练 习

1. 分别写出经过下列两点的直线的方程：
   (1) $(1, 3)$，$(-1, 2)$； (2) $(2, 3)$，$(0, 2)$；
   (3) $(3, 3)$，$(3, 4)$； (4) $(-2, 3)$，$(3, 3)$；
   (5) $(0, 3)$，$(-2, 0)$； (6) $(2, 0)$，$(0, -2)$.
2. 根据下列条件，分别写出直线的方程：
   (1) 在 x 轴、y 轴上的截距分别是 3，-4；
   (2) 过点 $P(1, 5)$，且在 y 轴上的截距为 6；
   (3) 过点 $P(-3, 4)$，且在 x 轴上的截距为 3.
3. 已知两点 $A(3, 2)$，$B(8, 12)$.
   (1) 求直线 AB 的方程；
   (2) 设 a 为实数，若点 $C(-2, a)$在直线 AB 上，求 a 的值.
4. 回答下列问题：
   (1) 如果两条直线有相同的斜率，但在 x 轴上的截距不同，那么它们在 y 轴上的截距可能相同吗?
   (2) 如果两条直线在 y 轴上的截距相同，但是斜率不同，那么它们在 x 轴上的截距可能相同吗?
   (3) 任一条直线都可以用截距式方程表示吗?

1.2.3 直线的一般式方程

我们已经学习了直线方程的几种特殊形式，它们都是关于 x，y 的二元一次方程，那么，

● 任意一条直线的方程都是关于 x，y 的二元一次方程吗？

事实上，在平面直角坐标系中，直线可以分成两类：一类是与 x 轴不垂直的直线，另一类是与 x 轴垂直的直线.

当直线与 x 轴不垂直时，直线的斜率存在，于是经过点 $P_1(x_1, y_1)$，斜率为 k 的直线的方程为 $y-y_1=k(x-x_1)$，即

$$kx-y+y_1-kx_1=0,$$

此方程是关于 x，y 的二元一次方程.

当直线与 x 轴垂直时，直线的斜率不存在，于是经过点 $P_1(x_1, y_1)$的直线的方程为 $x=x_1$，即

$$x+0\times y-x_1=0,$$

此方程也可看作是关于 x，y 的二元一次方程.

在平面直角坐标系中，动点由横坐标、纵坐标决定，所以方程 $x=x_1$ 也可以看成二元一次方程.

因此，平面直角坐标系中的任意一条直线的方程都可以用关于 x，y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$ (A，B 不全为 0)来表示.

反过来，关于 x，y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$ (A，B 不全为 0)都表示平面直角坐标系中的一条直线吗？

显然，当 $B\neq0$ 时，方程 $Ax+By+C=0$ 可以写成

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

它表示斜率为 $-\frac{A}{B}$，在 y 轴上的截距为 $-\frac{C}{B}$ 的直线.

当 $B=0$ 时，$A\neq0$，方程 $Ax+By+C=0$ 可以写成

$$x=-\frac{C}{A},$$

它表示垂直于 x 轴的直线.

因此，在平面直角坐标系中，任何一个关于 x，y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$ (A，B 不全为 0)都表示一条直线.

方程(*)也称为关于 x, y 的线性方程.

方程

$$Ax+By+C=0\ (A,\ B\text{ 不全为 }0) \qquad (*)$$

叫作直线的**一般式方程**(equation of general form).

例 5 求直线

$$l:3x+5y-15=0$$

的斜率以及它在 x 轴、y 轴上的截距,并作图.

解 将直线 l 的方程 $3x+5y-15=0$ 写成

$$y=-\frac{3}{5}x+3,$$

因此,直线 l 的斜率为

$$k=-\frac{3}{5}.$$

在方程 $3x+5y-15=0$ 中,当 $x=0$ 时, $y=3$;当 $y=0$ 时, $x=5$. 所以,直线 l 在 y 轴上的截距为 3,在 x 轴上的截距为 5.

过两点(5, 0),(0, 3)作直线,就得到直线 l(图 1 - 2 - 5).

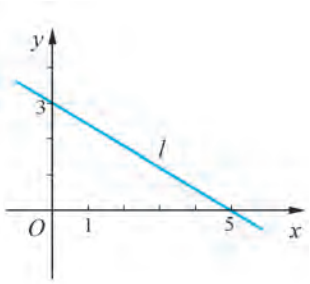


图 1 - 2 - 5

例 6 设 m 为实数,若直线 l 的方程为

$$x+my-2m+6=0,$$

根据下列条件分别确定 m 的值:

(1) 直线 l 在 x 轴上的截距是 -3;

(2) 直线 l 的斜率是 1.

解 (1) 令 $y=0$,得 $\quad x=2m-6.$

由题意知 $\qquad 2m-6=-3,$

解得 $\qquad m=\frac{3}{2}.$

(2) 因为直线 l 的斜率存在,所以 $m\neq 0$,于是直线 l 的方程化为

$$y=-\frac{1}{m}x+\frac{2m-6}{m}.$$

由题意知 $\qquad -\frac{1}{m}=1,$

解得 $\qquad m=-1.$

练 习

1. 分别写出下列直线的斜率以及它们在 x 轴、y 轴上的截距：

(1) $x+2y=4$； (2) $y=\dfrac{1}{2}(x+3)$；

(3) $y-1=-3(x-2)$； (4) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$.

2. 设直线 $5x-2y-10=0$ 在 x 轴上的截距为 a，在 y 轴上的截距为 b，则( ).

A. $a=2$，$b=5$ B. $a=2$，$b=-5$

C. $a=-2$，$b=5$ D. $a=-2$，$b=-5$

3. 设 m 为实数，若直线 l 的方程为 $mx+(m-1)y+3=0$，根据下列条件分别确定 m 的值：

(1) 直线 l 在 y 轴上的截距为 6； (2) 直线 l 的斜率为 2；

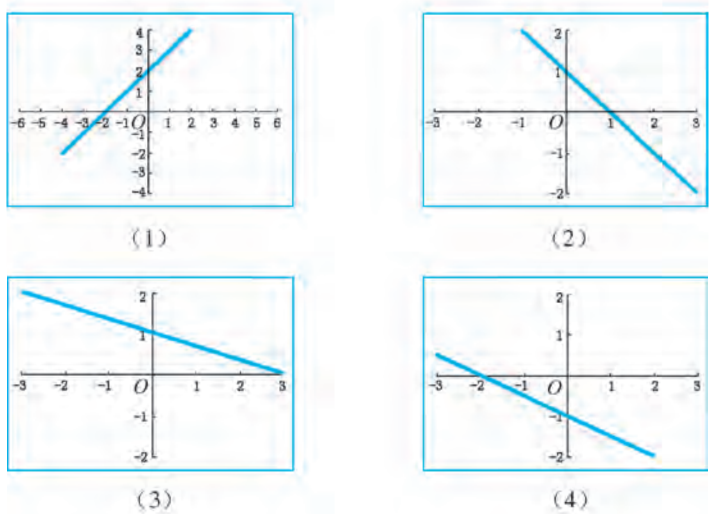
(3) 直线 l 垂直于 x 轴； (4) 直线 l 经过点 $(1，3)$.

4. 设 A，B，C 为实数，且 A，B 不同时为 0. 若直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$，根据下列条件，分别求出 A，B，C 应满足的条件：

(1) 直线 l 过原点； (2) 直线 l 垂直于 x 轴；

(3) 直线 l 垂直于 y 轴； (4) 直线 l 与两条坐标轴都相交.

5. 写出下列图中各条直线的方程，并化为一般式：



(1) (2) (3) (4)

（第 5 题）

习题 1.2

感受 · 理解

1. 分别写出下列直线的斜率以及它们在 x 轴、y 轴上的截距：

(1) $2x+y-4=0$； (2) $3x-6y+10=0$.

2. 根据下列条件，分别写出直线的方程：

(1) 过点 $(3，-2)$，斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；

(2) 过点 $(-3，0)$，与 x 轴垂直；

(3) 斜率为 -4，在 y 轴上的截距为 7；

(4) 斜率为 3，在 x 轴上的截距为 -2；

(5) 过点 $(-1，8)$，$(4，-2)$；

(6) 过点$(2, 0)$，$(0, -3)$.

3. 写出过点$P(3, 1)$，且分别满足下列条件的直线l的方程：

(1) 垂直于x轴；

(2) 垂直于y轴；

(3) 过原点；

(4) 与直线$x+2y-3=0$的斜率相等.

4. 分别求下列直线与两坐标轴围成的三角形的面积：

(1) $x+y-2=0$；

(2) $2x-3y-6=0$；

(3) $5x+3y+2=0$.

5. 一根弹簧挂4 kg的物体时，长20 cm. 在弹性限度内，所挂物体的质量每增加1 kg，弹簧伸长1.5 cm. 试写出弹簧的长度l(单位：cm)和所挂物体质量m(单位：kg)之间的关系.

6. 一根铁棒在40℃时长12.506 m，在80℃时长12.512 m. 已知铁棒的长度l(单位：m)和温度t(单位：℃)之间的关系可以用直线方程来表示，试求出这个方程，并根据这个方程求出这根铁棒在100℃时的长度.

7. 已知菱形的两条对角线长分别为8和6，以菱形的中心为坐标原点，较长对角线所在的直线为x轴，建立直角坐标系，求出菱形各边所在直线的方程.

8. 已知直线l经过点$(3, -1)$，且与两条坐标轴围成一个等腰直角三角形，求直线l的方程.

思考·运用

9. 设k为实数，若直线l的方程为$2x+(k-3)y-2k+6=0\ (k\neq 3)$，根据下列条件分别确定$k$的值：

(1) 直线l的斜率为-1；

(2) 直线l在x轴、y轴上截距之和等于1.

10. 已知点$P_0(x_0, y_0)$不在直线l_1：$2x+3y+4=0$上，直线l_2过点$P_0(x_0, y_0)$，且它的斜率与直线l_1的斜率相等，证明：直线l_2的方程可以写成$2(x-x_0)+3(y-y_0)=0$.

11. 已知直线l过点$P(2, 3)$，根据下列条件分别求直线l的方程：

(1) l在x轴、y轴上的截距之和等于0；

(2) l与两条坐标轴在第一象限所围成的三角形的面积为16.

探究·拓展

12. 设直线l的方程为$y-3=k(x+2)$，当k取任意实数时，这样的直线具有什么共同的特点？

13. 已知两条直线$a_1x+b_1y+1=0$和$a_2x+b_2y+1=0$都过点$A(1, 2)$，求过两点$P_1(a_1, b_1)$，$P_2(a_2, b_2)$的直线的方程.

1.3 两条直线的平行与垂直

在平面直角坐标系中，直线的斜率刻画了直线的倾斜程度，而两条直线平行或垂直的位置关系与它们的倾斜程度密切相关.那么，

● 怎样通过直线的斜率来判断两条直线平行或垂直的位置关系呢?

首先我们研究两条直线平行的情形.

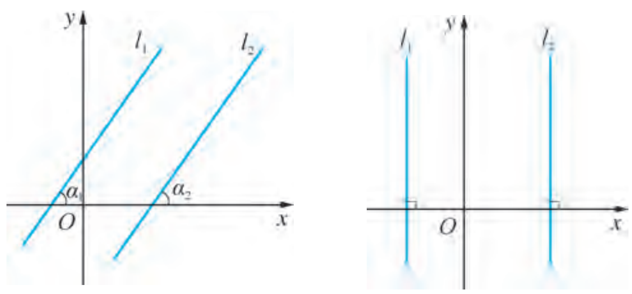
当直线 l_1，l_2 的斜率均存在时，设直线 l_1，l_2 的斜截式方程分别为

$$l_1: y=k_1x+b_1,$$

$$l_2: y=k_2x+b_2,$$

它们的倾斜角分别是 α_1，α_2.

如果直线 $l_1 /\!/ l_2$(图 1－3－1(1))，那么它们的倾斜角相等，



(1)　　(2)

图 1－3－1

即 $$\alpha_1=\alpha_2,$$

所以 $$\tan\alpha_1=\tan\alpha_2,$$

从而 $$k_1=k_2.$$

反之，如果 $k_1=k_2$，那么

$$\tan\alpha_1=\tan\alpha_2.$$

因为 $0\leqslant\alpha_1<\pi$，$0\leqslant\alpha_2<\pi$，根据正切函数的性质可知

$$\alpha_1=\alpha_2,$$

从而 $$l_1 /\!/ l_2.$$

因此，当两条直线的斜率都存在时，如果它们互相平行，那么它们的斜率相等；反之，如果两条直线的斜率相等，那么它们互相平行.

这里 l_1，l_2 指不重合的两条直线.

$$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2 \quad (k_1,\ k_2 \text{ 均存在}).$$

如果直线 l_1，l_2 的斜率都不存在，那么它们都与 x 轴垂直，所以 $l_1 // l_2$（图 1－3－1(2)）.

例 1 证明：顺次连接 $A(2,\ -3)$，$B\left(5,\ -\frac{7}{2}\right)$，$C(2,\ 3)$，$D(-4,\ 4)$四点所得的四边形是梯形（图 1－3－2）.

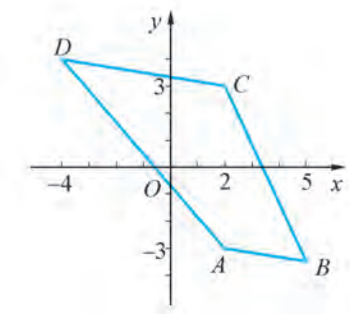


图 1－3－2

分析 要证明一个四边形是梯形，即要证明该四边形的一组对边平行，另一组对边不平行.

证明 因为

$$k_{AB}=\frac{-\frac{7}{2}-(-3)}{5-2}=-\frac{1}{6},$$

$$k_{CD}=\frac{4-3}{-4-2}=-\frac{1}{6},$$

所以 $$k_{AB}=k_{CD},$$

从而 $$AB // CD.$$

又因为 $$k_{BC}=\frac{3-\left(-\frac{7}{2}\right)}{2-5}=-\frac{13}{6},$$

$$k_{DA}=\frac{-3-4}{2-(-4)}=-\frac{7}{6},$$

所以 $$k_{BC}\neq k_{DA},$$

从而直线 BC 与 DA 不平行.

因此，四边形 $ABCD$ 是梯形.

例 2 判断下列各组直线是否平行，并说明理由：

(1) l_1：$y=2x+1$， l_2：$y=2x-1$；

(2) l_1：$2x-y-7=0$， l_2：$x+2y-1=0$.

解 设直线 l_1，l_2的斜率分别为 k_1，k_2.

(1) 由直线 l_1,l_2的方程可知

$$k_1 = 2, k_2 = 2,$$

所以

$$k_1 = k_2.$$

又直线 l_1,l_2在 y 轴上的截距分别为 1 和-1,所以 l_1 与 l_2 不重合,从而

$$l_1 \parallel l_2.$$

(2) 由直线 l_1,l_2的方程可知

$$k_1=2,\ k_2=-\frac{1}{2},$$

所以 $k_1 \neq k_2$,从而 l_1与 l_2不平行.

例 3 求过点 $A(2, -3)$,且与直线

$$2x + y - 5 = 0$$

平行的直线的方程.

解 已知直线的斜率是-2,因为所求直线与已知直线平行,所以所求直线的斜率也是-2.

根据直线的点斜式方程,得所求直线的方程为

$$y + 3 = -2(x - 2),$$

即

$$2x + y - 1 = 0.$$

练 习

1. 分别根据下列各点的坐标,判断各组中直线 AB 与 CD 是否平行:
   (1) $A(3, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(-3, 5)$, $D(5, 1)$;
   (2) $A(2, -4)$, $B(-\sqrt{3}, -4)$, $C(0, 1)$, $D(4, 1)$;
   (3) $A(2, 3)$, $B(2, -1)$, $C(-1, 4)$, $D(-1, 1)$;
   (4) $A(-1, -2)$, $B(2, 1)$, $C(3, 4)$, $D(-1, -1)$.
2. 已知点 $A(-4, -2)$, $B(1, -1)$, $C(5, 5)$, $D\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{2}\right)$,求证:四边形 $ABCD$是梯形.
3. 判断下列各组直线是否平行,并说明理由:
   (1) l_1: $y = -x + 1$, l_2: $y = -x + 3$;
   (2) l_1: $3x - 2y - 1 = 0$, l_2: $6x - 4y - 1 = 0$;
   (3) l_1: $2x - 5y - 7 = 0$, l_2: $5x - 2y - 1 = 0$;
   (4) l_1: $y - 2 = 0$, l_2: $y + 1 = 0$.
4. 分别求过点 $A(2, 3)$,且平行于下列直线的直线的方程:
   (1) $2x + 5y - 3 = 0$;
   (2) $4x - y = 0$;
   (3) $x - 5 = 0$;
   (4) $y + 6 = 0$.

下面我们研究两条直线垂直的情形.

如图 1-3-3,如果直线 $l_1 \perp l_2$(l_1, l_2 都不与 x 轴垂直),那么直线 l_1, l_2的倾斜角 α_1, α_2中必定一个是锐角,另一个是钝角. 不妨设 α_2是钝角,则

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2},$$

从而

$$k_2 = \tan\alpha_2 = \tan\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\alpha_1} = -\frac{1}{k_1},$$

即

$$k_1 k_2 = -1.$$

你能用其他方法得到这一结果吗?

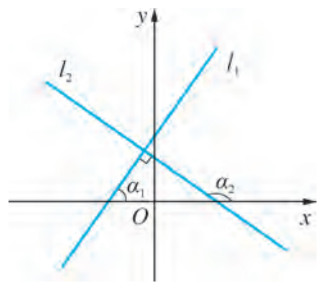


图 1-3-3

反过来,如果

$$k_1 k_2 = -1,$$

那么可以证明 $l_1 \perp l_2$(注:留作习题 1.3 第 8 题).

因此,当两条直线的斜率都存在时,如果它们互相垂直,那么它们斜率的乘积等于-1;反之,如果它们斜率的乘积等于-1,那么它们互相垂直.

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1 \quad (k_1, k_2 \text{ 均存在}).$$

思 考

如果两条直线 l_1, l_2 中的一条的斜率不存在,那么何时这两条直线互相垂直?

例 4 (1) 已知四点 $A(5, 3)$, $B(10, 6)$, $C(3, -4)$, $D(-6, 11)$,求证:$AB \perp CD$;

(2) 已知直线 l_1:$3x + 5y - 10 = 0$, l_2:$15x - 9y + 8 = 0$,求证:$l_1 \perp l_2$.

证明 (1) 由斜率公式,得

$$k_{AB} = \frac{6-3}{10-5} = \frac{3}{5},\ k_{CD} = \frac{11-(-4)}{-6-3} = -\frac{5}{3},$$

则

$$k_{AB} k_{CD} = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{5}{3}\right) = -1,$$

所以

$$AB \perp CD.$$

(2) 由 l_1, l_2 的方程可知,它们的斜率 $k_1=-\frac{3}{5}$, $k_2=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$,

从而 $$k_1k_2=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{3}=-1,$$

所以 $$l_1\perp l_2.$$

例 5 如图 1-3-4,已知三角形的顶点为 $A(2,\ 4)$, $B(1,\ -2)$, $C(-2,\ 3)$,求 BC 边上的高 AD 所在直线的方程.

解 直线 BC 的斜率为

$$k_{BC}=\frac{3-(-2)}{-2-1}=-\frac{5}{3}.$$

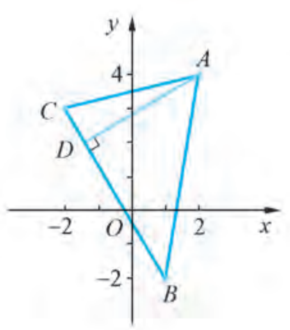


图 1-3-4

因为 $AD\perp BC$,

所以 $$k_{AD}=-\frac{1}{k_{BC}}=\frac{3}{5}.$$

根据直线的点斜式方程,得所求直线的方程为

$$y-4=\frac{3}{5}(x-2),$$

即 $$3x-5y+14=0.$$

例 6 在路边安装路灯,路宽 23 m,灯杆长 2.5 m,且与灯柱成 120°角.路灯采用锥形灯罩,灯罩轴线与灯杆垂直.当灯柱高为多少米时,灯罩轴线正好通过道路路面的中线(精确到 0.01 m)?

解 如图 1-3-5,记灯柱顶端为 B,灯罩顶为 A,灯杆为 AB,灯罩轴线与道路中线交于点 C,灯柱的高为 h m.以灯柱底端 O 点为原点,灯柱 OB 所在直线为 y 轴,建立如图所示的直角坐标系.

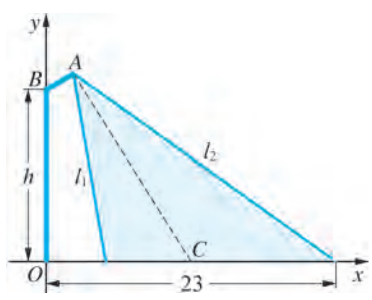


图 1-3-5

点 B 的坐标为 $(0,\ h)$,点 C 的坐标为 $(11.5,\ 0)$.因为 $\angle OBA=120°$,所以直线 BA 的倾斜角为 30°,从而点 A 的坐标为

$$(2.5\cos 30°,\ h+2.5\sin 30°),$$

即 $$(1.25\sqrt{3},\ h+1.25).$$

因为 $CA \perp BA$，所以

$$k_{CA}=-\frac{1}{k_{BA}}=-\frac{1}{\tan 30^{\circ}}=-\sqrt{3},$$

从而直线 CA 的方程是

$$y-(h+1.25)=-\sqrt{3}(x-1.25\sqrt{3}).$$

又灯罩轴线 CA 过点 $C(11.5, 0)$，则

$$-(h+1.25)=-\sqrt{3}(11.5-1.25\sqrt{3}),$$

解得 $$h \approx 14.92.$$

答 灯柱高约为 14.92 m.

练　习

1. 分别根据下列各点的坐标，判断各组中直线 AB 与 CD 是否垂直：
   (1) $A(-1, -2)$，$B(1, 2)$，$C(-2, 1)$，$D(2, -1)$；
   (2) $A(0, 2)$，$B(1, 0)$，$C(3, 2)$，$D(5, 3)$；
   (3) $A(3, 4)$，$B(3, -2)$，$C(-1, 4)$，$D(1, 4)$；
   (4) $A(-3, 1)$，$B(1, 5)$，$C(2, 4)$，$D(0, 3)$.
2. 以点 $A(-1, 1)$，$B(2, -1)$，$C(1, 4)$为顶点的三角形是(　　).
   A. 锐角三角形　　B. 直角三角形　　C. 钝角三角形
3. 判断下列各组直线是否垂直，并说明理由：
   (1) l_1：$y=-2x+1$，　l_2：$y=\frac{1}{2}x+3$；
   (2) l_1：$3x-y-1=0$，　l_2：$2x+6y-1=0$；
   (3) l_1：$2x-5y-7=0$，　l_2：$5x-2y-1=0$；
   (4) l_1：$y-2=0$，　l_2：$x+1=0$.
4. 分别求过点 $A(2, 3)$，且垂直于下列直线的直线的方程：
   (1) $x-y-3=0$；　(2) $3x+2y-1=0$；
   (3) $x-1=0$；　(4) $y+2=0$.
5. 直线 l_1，l_2 的方程为
   $$l_1: 2x+3y-2=0,$$
   $$l_2: mx+(2m-1)y+1=0.$$
   设 m 为实数，分别根据下列条件求 m 的值：
   (1) $l_1 \parallel l_2$；　(2) $l_1 \perp l_2$.

习题 1.3

感受·理解

1. 判断下列各组直线是否平行，并说明理由：
   (1) l_1：$y=-\frac{1}{2}x+1$，　l_2：$y=-\frac{1}{2}x+3$；

(2) l_1: $3x+\sqrt{3}y-1=0$, l_2: $\sqrt{3}x+y-1=0$;

(3) l_1: $x+3y=3$, l_2: $y=-\dfrac{1}{3}x+1$;

(4) l_1: $x-2=0$, l_2: $5x+1=0$.

2. 判断下列各组直线是否垂直,并说明理由:

(1) l_1: $y=\sqrt{2}x+1$, l_2: $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+3$;

(2) l_1: $\sqrt{3}x-y-1=0$, l_2: $\sqrt{3}x+3y-1=0$;

(3) l_1: $3x+4y-7=0$, l_2: $4x+3y-1=0$;

(4) l_1: $3x+2=0$, l_2: $5x+8=0$.

3. 分别求满足下列条件的直线的方程:

(1) 过点 $A(3, 2)$,且与直线 $4x+y-2=0$ 平行;

(2) 过点 $B(3, 0)$,且与直线 $2x+y-5=0$ 垂直;

(3) 过点$(5, 4)$,且与 x 轴垂直;

(4) 过点 $C(2, -3)$,且平行于过两点 $M(1, 2)$和 $N(-1, -5)$的直线.

4. 已知点 $A(-1, 3)$, $B(3, -2)$, $C(6, -1)$, $D(2, 4)$,求证:四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

5. 已知三角形的三个顶点是 $A(4, 0)$,$B(6, 7)$,$C(0, 3)$,求边 AB 上的高所在直线的方程.

6. 设 a 为实数,若直线 $ax+2ay+1=0$ 垂直于直线$(a-1)x-(a+1)y-1=0$,求 a 的值.

思考・运用

7. (1) 已知直线 l: $Ax+By+C=0$,其中 A, B 不全为 0,且直线 $l_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} l$,求证:直线 l_1 的方程总可以写成 $Ax+By+C_1=0$ $(C_1\neq C)$;

(2) 已知直线 l: $Ax+By+C=0$,其中 A, B 不全为 0,且直线 $l_2\perp l$,求证:直线 l_2 的方程总可以写成 $Bx-Ay+C_2=0$.

8. 证明:如果两条直线斜率的乘积等于-1,那么这两条直线互相垂直.

9. (1) 已知直线 l 过点 $P(x_0, y_0)$,且与直线 l_1: $Ax+By+C=0$(P 不在 l_1 上)平行,其中 A,B 不全为 0,求证:直线 l 的方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$;

(2) 已知直线 l 过点 $P(x_0, y_0)$,且与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直,其中 A, B 不全为 0,求证:直线 l 的方程为 $B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$.

探究・拓展

10. 已知两条直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 $(0<k_1<k_2)$,设 l_1, l_2 的夹角(锐角)为 θ.

(1) 求证:$\tan\theta=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$;

(2) 求直线 $2x-y+1=0$ 与直线 $x-3y-3=0$ 的夹角 θ.

1.4 两条直线的交点

我们已经知道，在平面直角坐标系中，任何一条直线都可以用方程来表示，那么，

● 能否用直线方程来研究两条直线的交点问题？

设两条直线的方程分别是

$$l_1：A_1x+B_1y+C_1=0，l_2：A_2x+B_2y+C_2=0.$$

如果这两条直线相交，由于交点同时在这两条直线上，交点的坐标一定是这两个方程的公共解；反之，如果这两个二元一次方程只有一个公共解，那么以这个解为坐标的点必是直线 l_1 和 l_2 的交点.

据此，我们有

方程组 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 的解	一　组	无数组	无　解
直线 l_1，l_2 的公共点	一　个	无数个	零　个
直线 l_1，l_2 的位置关系	相　交	重　合	平　行

例 1　分别判断下列直线 l_1 与 l_2 是否相交. 若相交，求出它们交点的坐标：

(1) $l_1：2x-y=7$，　　$l_2：3x+2y-7=0$；

(2) $l_1：2x-6y+4=0$，　　$l_2：4x-12y+8=0$；

(3) $l_1：4x+2y+4=0$，　　$l_2：y=-2x+3$.

解　(1) 因为方程组

$$\begin{cases}2x-y-7=0,\\3x+2y-7=0\end{cases}$$

的解为

$$\begin{cases}x=3,\\y=-1,\end{cases}$$

所以直线 l_1 和 l_2 相交，且交点坐标为 $(3,-1)$.

(2) 因为方程组

$$\begin{cases}2x-6y+4=0,\\4x-12y+8=0\end{cases}$$

有无数组解，所以直线 l_1 和 l_2 重合.

(3) 因为方程组

$$\begin{cases}4x+2y+4=0,\\2x+y-3=0\end{cases}$$

无解，所以 $l_1 \parallel l_2$.

例 2 设 a 为实数，直线 l_1：$2x+3y-1=0$，l_2：$x+(a-1)y+2=0$. 若 $l_1 \parallel l_2$，求 a 的值.

解法 1 因为 $l_1 \parallel l_2$，所以方程组

$$\begin{cases}2x+3y-1=0, & ①\\x+(a-1)y+2=0 & ②\end{cases}$$

无解.

由 ②×2−①，得 $(2a-5)y=-5$. ③

从而③无解，即

$$2a-5=0,$$

解得

$$a=\frac{5}{2}.$$

解法 2 由直线 l_1 的方程可知，它的斜率 $k_1=-\frac{2}{3}$.

因为 $l_1 \parallel l_2$，所以直线 l_2 的斜率存在，设为 k_2，且 $k_2=-\frac{2}{3}$.

又由直线 l_2 的方程可知，它的斜率 $k_2=-\frac{1}{a-1}$，

所以

$$-\frac{1}{a-1}=-\frac{2}{3},$$

解得

$$a=\frac{5}{2}.$$

例 3 已知直线 l 经过原点，且经过如下两条直线

$$2x+3y+8=0,\ x-y-1=0$$

的交点，求直线 l 的方程.

解 因为方程组

$$\begin{cases}2x+3y+8=0,\\x-y-1=0\end{cases}$$

的解为
$$\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$$
所以两条直线 $2x+3y+8=0$ 和 $x-y-1=0$ 的交点坐标为 $(-1,-2)$，从而由题意知直线 l 经过点 $(-1,-2)$.

又直线 l 经过原点，所以直线 l 的方程为
$$\frac{y-0}{-2-0}=\frac{x-0}{-1-0},$$
即
$$2x-y=0.$$

思　考

已知直线
$$l_1: 2x+3y+8=0,$$
$$l_2: x-y-1=0,$$
则方程 $2x+3y+8+\lambda(x-y-1)=0$（λ 为任意实数）表示的直线有什么特点？

练　习

1. 与直线 $2x-y-3=0$ 相交的直线的方程是（　　）.

A. $4x-2y-6=0$　　B. $y=2x$

C. $y=2x+5$　　D. $y=-2x+3$

2. 判断下列各组直线 l_1 与 l_2 是否相交. 若相交，求出它们的交点.

(1) l_1：$2x+y-3=0$，　l_2：$x+2y-3=0$；

(2) l_1：$3x+4y-1=0$，　l_2：$6x+8y-3=0$.

3. 设 k 为实数，若三条直线 $2x+3y+8=0$，$x-y-1=0$ 和 $x+ky+k+\frac{1}{2}=0$ 相交于一点，则 k 的值为（　　）.

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

4. 已知直线 l 过两条直线 $2x-3y-3=0$ 和 $x+y+2=0$ 的交点，且与直线 $3x+y-1=0$ 平行，求直线 l 的方程.

5. 已知直线 l 过两条直线 $x-y+2=0$ 和 $2x+y+1=0$ 的交点，且与直线 $x-3y-2=0$ 垂直，求直线 l 的方程.

习题 1.4

感受・理解

1. 判断下列各组直线 l_1 与 l_2 是否相交. 若相交，求出它们的交点.

(1) l_1：$x-4y-1=0$，　l_2：$x+2y-4=0$；

(2) l_1：$\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$，　l_2：$x+\sqrt{3}y+2=0$；

(3) l_1：$\sqrt{2}x-3y-2=0$，　l_2：$2x-3\sqrt{2}y+1=0$.

2. 分别根据下列条件，求直线的方程：

(1) 斜率为 -2，且过两条直线 $3x-y+4=0$ 和 $x+y-4=0$ 的交点；

(2) 过两条直线 $x-2y+3=0$ 和 $x+2y-9=0$ 的交点和原点；

(3) 过两条直线 $x-y+5=0$ 和 $3x+4y-2=0$ 的交点，且垂直于直线 $3x-2y+4=0$；

(4) 过两条直线 $2x+y-8=0$ 和 $x-2y+1=0$ 的交点，且平行于直线 $4x-3y-7=0$.

3. 设 a 为实数，若三条直线 $ax+2y+8=0$，$4x+3y=10$ 和 $2x-y=10$ 相交于一点，求 a 的值.

4. 求两条互相垂直的直线 $2x+y+2=0$ 与 $ax+4y-2=0$ 的交点坐标.

5. 设 k 为实数，若直线 $y=kx+3$ 与直线 $y=\frac{1}{k}x-5$ 的交点在直线 $y=x$ 上，求 k 的值.

6. 设 m 为实数，已知两条直线 l_1：$(3+m)x+4y=5-3m$，l_2：$2x+(5+m)y=8$. 当 m 为何值时，l_1 与 l_2：

(1) 相交？ (2) 平行？

思考・运用

7. 设 a 为实数，若三条直线 $x+y+1=0$，$2x-y+8=0$ 和 $ax+3y-5=0$ 共有三个不同的交点，求 a 满足的条件.

8. 设 a 为实数，若三条直线 $x+y-1=0$，$2x+3y-5=0$ 和 $x-ay+8=0$ 共有两个不同的交点，求 a 的值.

探究・拓展

9. 已知直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$(A_1，B_1 不全为 0) 与直线 l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$(A_2，B_2 不全为 0) 相交于点 P，求证：过点 P 的直线可以写成 $m(A_1x+B_1y+C_1)+n(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 的形式.

10. 直线 l_1 和 l_2 的方程分别是 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$，其中 A_1，B_1 不全为 0，A_2，B_2 也不全为 0.

(1) 当 $l_1 \parallel l_2$ 时，直线方程中的系数应满足什么关系？

(2) 当 $l_1 \perp l_2$ 时，直线方程中的系数应满足什么关系？

1.5 平面上的距离

在平面直角坐标系中，我们建立了点与坐标、直线与方程的对应关系，并据此研究了点与直线、直线与直线之间的位置关系，那么，

● 怎样借助点的坐标和直线的方程，来探求点与点、点与直线以及两平行直线之间的距离？

1.5.1 平面上两点间的距离

● 对于平面上的两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，如何求这两点间的距离？

我们先看一个具体的例子.

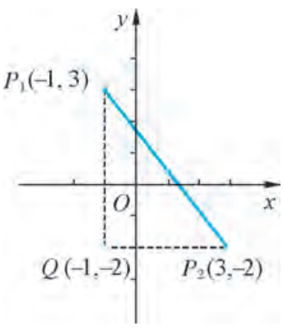


图 1-5-1

已知点 $P_1(-1, 3)$，$P_2(3, -2)$，下面探求 P_1，P_2 两点间的距离 P_1P_2.

如图 1-5-1，过点 P_1 向 x 轴作垂线，过点 P_2 向 y 轴作垂线，两条垂线交于点 Q，则 Q 点的坐标是 $(-1, -2)$，且

$$QP_1 = |3-(-2)| = 5,\ QP_2 = |3-(-1)| = 4.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle P_1QP_2$ 中，

$$P_1P_2^2 = QP_1^2 + QP_2^2 = 5^2 + 4^2 = 41.$$

因此，P_1，P_2 两点之间的距离为

$$P_1P_2 = \sqrt{41}.$$

一般地，如果 $x_1 \neq x_2$，$y_1 \neq y_2$，过点 P_1，P_2 分别向 y 轴、x 轴作垂线，两条垂线交于点 Q（图 1-5-2(1)），则点 Q 的坐标是 (x_2, y_1)，且

x 轴上两点 $P_1(x_1, 0)$，$P_2(x_2, 0)$ 之间的距离可以表示为 $P_1P_2 = |x_2 - x_1|$. 当点 P_1 在点 P_2 的左侧时，$P_1P_2 = x_2 - x_1$.

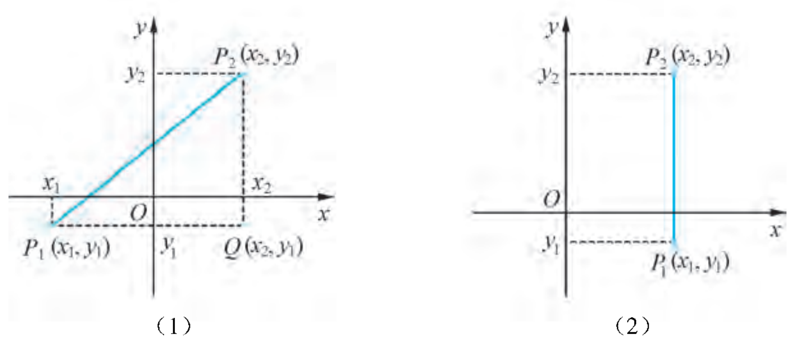


图 1-5-2

$$QP_1=|x_2-x_1|,\ QP_2=|y_2-y_1|.$$

在Rt$\triangle P_1QP_2$ 中，

$$\begin{aligned}P_1P_2^2&=QP_1^2+QP_2^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.\end{aligned}\qquad (*)$$

如果 $x_1=x_2$(图 1-5-2(2))，那么

$$P_1P_2=|y_2-y_1|,$$

(*)式也成立.

如果 $y_1=y_2$，那么

$$P_1P_2=|x_2-x_1|,$$

(*)式仍成立.

由此，我们得到平面上 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$两点间的距离公式

能用其他方法得到这一结果吗?

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

例 1 (1) 求 $A(-1,\ 3)$，$B(2,\ 5)$两点间的距离；

(2) 设 a 为实数，已知 $A(0,\ 10)$，$B(a,\ -5)$两点间的距离是 17，求 a 的值.

解 (1) 由两点间距离公式，得

$$AB=\sqrt{[2-(-1)]^2+(5-3)^2}=\sqrt{13}.$$

(2) 由两点间距离公式，得

$$\sqrt{(a-0)^2+(-5-10)^2}=17,$$

解得 $$a=\pm 8.$$

故所求实数 a 的值为 8 或-8.

例 2 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(-1,\ 5)$，$B(-2,\ -1)$，$C(4,\ 7)$，求 BC 边上的中线 AM 的长和 AM 所在直线的方程.

解 如图 1-5-3，设点 M 的坐标为$(x,\ y)$，过点 B，M，C 向 x 轴作垂线，垂足分别为点 B'，M'，C'，则点 B'，M'，C'的横坐标分别为-2，x，4.

因为点 M 是线段 BC 的中点，所以点 M'是线段 $B'C'$的中点，即 $B'M'=M'C'$，从而

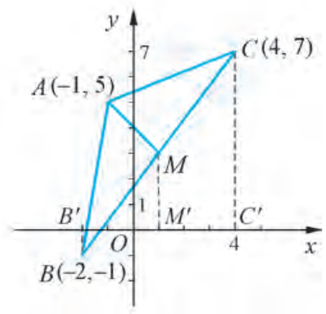


图 1-5-3

$$x-(-2)=4-x,$$

所以
$$x=\frac{(-2)+4}{2}=1.$$

同理可得
$$y=\frac{(-1)+7}{2}=3.$$

所以点 M 的坐标为(1，3).

由两点间距离公式，得

$$AM=\sqrt{[1-(-1)]^2+(3-5)^2}=2\sqrt{2}.$$

因此，BC 边上的中线 AM 的长为 $2\sqrt{2}$.

由直线的两点式方程，得中线 AM 所在直线的方程为

$$\frac{y-3}{5-3}=\frac{x-1}{-1-1},$$

即
$$x+y-4=0.$$

对于平面上的两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，线段 P_1P_2 的中点是 $M(x_0, y_0)$，则

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases}$$

例 3 在直角三角形 ABC 中，点 M 为斜边 BC 的中点，试建立适当的直角坐标系，求证：$AM=\frac{1}{2}BC$.

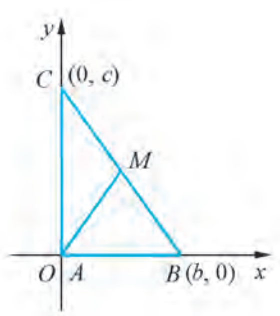


图 1-5-4

证明 如图 1-5-4，以 Rt△ABC 的直角边 AB，AC 所在直线为坐标轴，建立直角坐标系. 设 B，C 两点的坐标分别为 $(b, 0)$，$(0, c)$.

因为点 M 是 BC 的中点，所以点 M 的坐标为 $\left(\frac{0+b}{2}, \frac{0+c}{2}\right)$，即 $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

由两点间距离公式，得

$$BC=\sqrt{(0-b)^2+(c-0)^2}=\sqrt{b^2+c^2},$$

$$AM=\sqrt{\left(\frac{b}{2}-0\right)^2+\left(\frac{c}{2}-0\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}.$$

所以 $$AM=\frac{1}{2}BC.$$

练　习

1. 分别根据下列条件，求线段 AB 的长及线段 AB 中点的坐标：
   (1) $A(8, 10)$，$B(-4, 4)$；
   (2) $A(-\sqrt{3}, \sqrt{2})$，$B(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
2. (1) 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3, 2)$，$B(1, 0)$，$C(2+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$，求 AB 边上的中线 CM 的长；
   (2) 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(0, 1)$，$B(2, 5)$，$C(-4, 3)$，分别求三条中位线的长.
3. 已知两点 $P(1, -4)$，$A(3, 2)$，求点 A 关于点 P 的对称点 B 的坐标.
4. 证明：点 $M(1, 1)$ 与点 $N(5, -1)$ 关于直线 l：$2x-y-6=0$ 对称.

1.5.2　点到直线的距离

● 对于平面上确定的直线 l：$Ax+By+C=0$（A，B 不全为 0）和直线 l 外一点 $P(x_0, y_0)$，如何求点 P 到直线 l 的距离呢？

我们先看一个具体的例子.

已知点 $P(2, 4)$ 和直线 l：$5x+4y-7=0$，下面探求点 P 到直线 l 的距离.

如图 1-5-5，过点 P 作 $PE\perp l$，垂足为 E，则点 P 到直线 l 的距离就是线段 PE 的长.

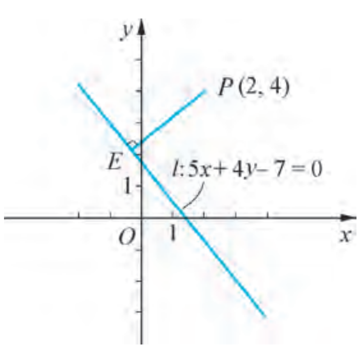


图 1-5-5

方法 1　通过求点 E 的坐标，用两点间距离公式求 PE.

第一步　由 $PE\perp l$，可知 PE 所在直线的斜率为 $\frac{4}{5}$；

第二步　写出 PE 所在直线的方程：$y-4=\frac{4}{5}(x-2)$，即 $4x-5y+12=0$；

第三步　由 l 和 PE 所在直线的方程联立方程组

$$\begin{cases}5x+4y-7=0,\\4x-5y+12=0,\end{cases}$$

解得垂足 E 的坐标为$\left(-\frac{13}{41}, \frac{88}{41}\right)$；

第四步　利用两点间距离公式，求出点 P 到直线 l 的距离

$$PE=\sqrt{\left(-\frac{13}{41}-2\right)^2+\left(\frac{88}{41}-4\right)^2}=\frac{19\sqrt{41}}{41}.$$

方法 2　通过构造三角形，利用面积关系求点 P 到直线 l 的距离.

如图 1－5－6，过点 P 分别作 y 轴、x 轴的垂线，交直线 l 于点 M，N. 我们通过计算 Rt$\triangle PMN$ 的面积求 PE.

第一步　求出 $M\left(-\frac{9}{5}, 4\right)$，$N\left(2, -\frac{3}{4}\right)$；

第二步　计算

$$PM=\left|-\frac{9}{5}-2\right|=\frac{19}{5},\ PN=\left|-\frac{3}{4}-4\right|=\frac{19}{4};$$

还可用两点间距离公式求 MN.

第三步　由勾股定理，得

$$MN=\sqrt{PM^2+PN^2}=\sqrt{\left(\frac{19}{5}\right)^2+\left(\frac{19}{4}\right)^2}=\frac{19}{20}\sqrt{41};$$

第四步　由三角形面积公式可知

$$PE=\frac{PM\cdot PN}{MN}=\frac{\frac{19}{5}\times\frac{19}{4}}{\frac{19}{20}\sqrt{41}}=\frac{19\sqrt{41}}{41}.$$

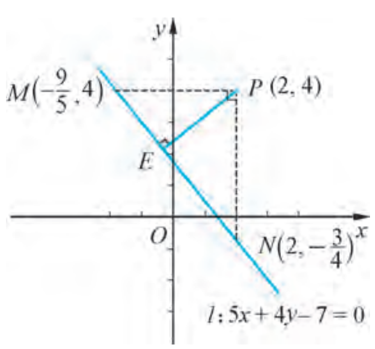


图 1－5－6

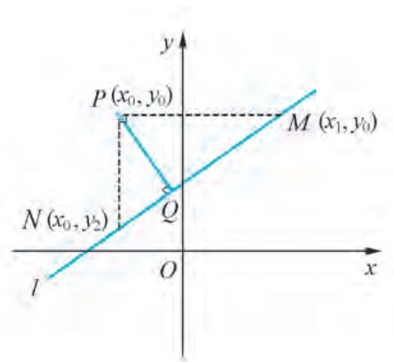


图 1－5－7

一般地，对于直线

$$l: Ax+By+C=0(A\neq 0, B\neq 0)$$

和直线 l 外一点 $P(x_0, y_0)$，过点 P 作 $PQ\perp l$，垂足为 Q. 过点 P 分别作 y 轴、x 轴的垂线，交 l 于点 $M(x_1, y_0)$，$N(x_0, y_2)$（图 1－5－7）.

由

$$Ax_1+By_0+C=0,\ Ax_0+By_2+C=0,$$

得
$$x_1=\frac{-By_0-C}{A},\ y_2=\frac{-Ax_0-C}{B}.$$

所以

$$PM=|x_1-x_0|=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{A}\right|,$$

$$PN=|y_2-y_0|=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{B}\right|.$$

因为 PQ 是 Rt△PMN 斜边上的高，所以由三角形面积公式可知

$$PQ=\frac{PM\cdot PN}{MN}=\frac{PM\cdot PN}{\sqrt{PM^2+PN^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

当 $A=0$ 或$B=0$ 时，此式仍然成立.

由此，我们得到点 $P(x_0,\ y_0)$ 到直线

$$l:\ Ax+By+C=0$$

的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

思　考

你还能通过其他途径求点 P 到直线 l 的距离吗?

例 4 分别求点 $P(-1,\ 2)$到下列直线的距离：

(1) $2x+y-10=0$； (2) $3x=2$.

解 (1) 根据点到直线的距离公式，得

$$d=\frac{|2\times(-1)+2-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}.$$

(2) 因为直线 $3x=2$ 平行于 y 轴，所以

$$d=\left|\frac{2}{3}-(-1)\right|=\frac{5}{3}.$$

当 $A=0$ 或 $B=0$ 时，可直接利用图形性质求出点到直线的距离.

例 5 求两条平行直线 $x+3y-4=0$ 与 $2x+6y-9=0$ 之间的距离.

分析 在两条平行直线中的一条直线上任取一点，将两条平行直线之间的距离转化为点到直线的距离.

解 在直线 $x+3y-4=0$ 上取点 $P(4,\ 0)$，点 $P(4,\ 0)$ 到直线 $2x+6y-9=0$ 的距离 d 就是两条平行直线之间的距离.

因此，两条平行直线之间的距离为

$$d=\frac{|2\times4+6\times0-9|}{\sqrt{2^2+6^2}}=\frac{1}{\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{10}}{20}.$$

思 考

已知两条平行直线

$$l_1: Ax+By+C_1=0,$$
$$l_2: Ax+By+C_2=0(C_1\neq C_2).$$

你能证明直线 l_1 和 l_2 之间的距离为 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 吗？

例 6 建立适当的直角坐标系，证明：等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一腰上的高.

证明 设△ABC 是等腰三角形，以底边 CA 所在直线为 x 轴，过顶点 B 且垂直于 CA 的直线为 y 轴，建立直角坐标系(图 1－5－8).

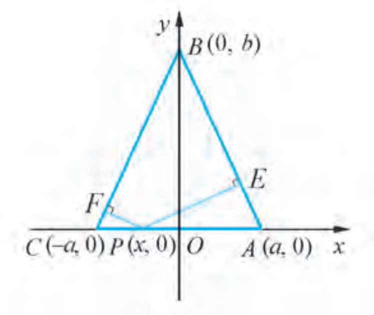


图 1－5－8

设 $A(a, 0)$，$B(0, b)(a>0, b>0)$，则 $C(-a, 0)$.

直线 AB 的方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，

即 $$bx+ay-ab=0.$$

直线 BC 的方程为 $\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{b}=1$，

即 $$bx-ay+ab=0.$$

设底边 AC 上任意一点为 $P(x, 0)(-a\leqslant x\leqslant a)$，则

点 P 到直线 AB 的距离为

$$PE=\frac{|bx-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b(a-x)}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

点 P 到直线 BC 的距离为

$$PF=\frac{|bx+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b(a+x)}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

点 A 到直线 BC 的距离为

$$h=\frac{|ba+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

所以

$$PE+PF=\frac{b(a-x)}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b(a+x)}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=h.$$

因此，等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一腰上的高.

练　习

1. 分别根据下列条件，求点 P 到直线 l 的距离：

(1) $P(3,\ -2)$，l：$3x+4y-25=0$；

(2) $P(-2,\ 1)$，l：$3y+5=0$.

2. 分别求下列两条平行直线之间的距离：

(1) $5x-12y-2=0$ 与 $5x-12y+15=0$；

(2) $6x-4y+5=0$ 与 $y=\frac{3}{2}x$.

3. 已知直线 l 过原点，且点 $M(5,\ 0)$ 到直线 l 的距离等于 3，求直线 l 的方程.

4. 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(1,\ 1)$，$B(3,\ 4)$，$C(4,\ -1)$，求 AB 边上高的长.

习题 1.5

感受·理解

1. 分别根据下列条件，求 A，B 两点之间的距离：

(1) $A(-2,\ 0)$，$B(-2,\ -3)$；

(2) $A(0,\ -3)$，$B(-3,\ -3)$；

(3) $A(3,\ 5)$，$B(-3,\ 3)$.

2. 已知点 $P(-1,\ 2)$，求点 P 分别关于原点、x 轴和 y 轴的对称点的坐标.

3. 已知点 A在 x 轴上，点 B 在 y 轴上，线段 AB 的中点 M 的坐标是 $(2,\ -1)$，求线段 AB 的长.

4. 已知 A，B 两点都在直线 $y=x-1$ 上，且 A，B 两点横坐标之差为$\sqrt{2}$，求 A，B 两点之间的距离.

5. 已知两点 $A(2,\ 3)$，$B(-1,\ 4)$，且点 $P(x,\ y)$ 到点 A，B 的距离相等，求实数 x，y 满足的条件.

6. 已知点 $P(x,\ y)$ 在直线 $x+y-4=0$ 上，O 是坐标原点，求 OP 的最小值.

7. 分别根据下列条件，求点 P 到直线 l 的距离：

(1) $P(2,\ 1)$，l：$2x+3=0$；

(2) $P(-3,\ 4)$，l：$3x-4y+30=0$.

8. 已知直线 l 到两条平行直线 $2x-y+2=0$ 和 $2x-y+4=0$ 的距离相等，求直线 l 的方程.

9. 已知直线 l 在 y 轴上的截距为 10，且原点到直线 l 的距离是 8，求直线 l 的方程.

10. 已知点 P 在直线 $3x+y-5=0$ 上，且点 P 到直线 $x-y-1=0$ 的距离等于$\sqrt{2}$，求点 P 的坐标.

11. 已知点 $A(7,\ 8)$，$B(10,\ 4)$，$C(2,\ -4)$，求$\triangle ABC$ 的面积.

12. 已知直线 l 过点$(-2,\ 3)$，且原点到直线 l 的距离是 2，求直线 l 的方程.

13. 在$\triangle ABC$ 中，E，F 分别为 AB，AC 的中点，建立适当的直角坐标系，求证：$EF \parallel BC$，且 $EF=\frac{1}{2}BC$.

思考・运用

14. 过点 $P(3,\ 0)$ 作直线 l，使它被两条相交直线 $2x-y-2=0$ 和 $x+y+3=0$ 所截得的线段恰好被点 P 平分，求直线 l 的方程.

15. 已知光线通过点 $A(-2,\ 3)$，经 x 轴反射，其反射光线通过点 $B(5,\ 7)$，求：

(1) 入射光线所在直线的方程；

(2) 反射光线所在直线的方程.

16. 已知点 $A(2,\ 1)$，直线 l：$x-y+1=0$，求点 A 关于直线 l 的对称点 B 的坐标.

17. 在直线 $x+2y=0$ 上求一点 P，使它到原点的距离与到直线 $x+2y-3=0$ 的距离相等.

18. 已知直线 l：$y=3x+3$，求：

(1) 直线 l 关于点 $M(3,\ 2)$ 对称的直线的方程；

(2) 直线 $x-y-2=0$ 关于直线 l 对称的直线的方程.

19. 建立适当的直角坐标系，证明：平行四边形四边的平方和等于两条对角线的平方和.

20. 证明：点 $A(a,\ b)$，$B(b,\ a)$关于直线 $y=x$ 对称.

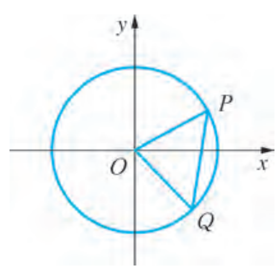
探究・拓展

21. 求函数 $f(x)=\sqrt{(x+1)^2+9}+\sqrt{(x-6)^2+4}$ 的最小值.

22. 如图，点 P 是角 α 的终边与单位圆的交点，点 Q 是角 $-\beta$ 的终边与单位圆的交点.

(1) 求 PQ；

(2) 求证：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.



（第 22 题）

23. 某人上午 8 时从山下大本营出发登山，下午 4 时到达山顶. 次日上午 8 时从山顶沿原路返回，下午 4 时回到山下大本营. 如果该人以同样的速度匀速上山、下山，那么两天中他可能在同一时刻经过途中同一地点吗？如果他在上山、下山过程中不是匀速行进的，他还可能在同一时刻经过途中同一地点吗？

24. （阅读题）点到直线的距离.

已知直线 l：$Ax+By+C=0$（A，B 不同时为 0）和直线 l 外一点

$P_0(x_0, y_0)$，过点 P_0 且与直线 l 垂直的直线 l' 的方程为 $B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$，直线 l 与 l' 的交点为 $P_1(x_1, y_1)$，则点 P_0 到直线 l 的距离为

$$d = P_0P_1 = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}. \qquad (*)$$

因为点 P_1 是直线 l 与 l' 的交点，

所以
$$Ax_1+By_1+C=0, \qquad ①$$
$$B(x_1-x_0)-A(y_1-y_0)=0. \qquad ②$$

策略 1：由①②联立，解出 x_1，y_1，然后代入 $(*)$ 式，求出 d.

策略 2：由于 $d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$，
而①式等价于

$$A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)=-Ax_0-By_0-C. \qquad ③$$

将 x_1-x_0，y_1-y_0 看作整体，由②③解出 x_1-x_0，y_1-y_0，然后代入 $(*)$ 式，求出 d.

策略 3：注意到②③和 $d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$ 的特点，将②式的两边平方与③式的两边平方相加，得

$$(A^2+B^2)[(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2]=(Ax_0+By_0+C)^2,$$

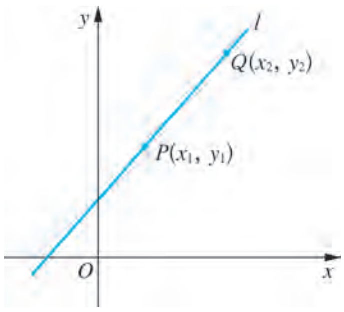
故
$$d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

问题与探究

向量方法在直线中的应用

借助平面直角坐标系，可以建立点与坐标、直线与方程之间的对应关系，而向量也是沟通几何与代数的一种重要工具，利用向量也可以有效地研究与直线、直线方程有关的问题. 那么，如何利用向量来研究与直线有关的问题呢？

如图，设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$是直线 l 上不同的两点，直线 l 上的向量$\overrightarrow{PQ}$以及与它平行的非零向量都称为直线 l 的**方向向量**. 直线 l 的一个方向向量$\overrightarrow{PQ}$的坐标是 (x_2-x_1, y_2-y_1).



当直线 $l' \perp l$ 时，直线 l'的方向向量称为直线 l 的**法向量**.

对于直线 l：$Ax+By+C=0$ (A，B 不同时为 0)，则

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+C=0, \\ Ax_2+By_2+C=0. \end{cases}$$

从而得 $A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0$，即向量 (x_2-x_1, y_2-y_1) 与向量$(-B, A)$平行，与向量(A, B)垂直，因此，向量$(-B, A)$是直线 l 的一个方向向量，向量(A, B)是直线 l 的一个法向量.

问题 1 已知直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$，且它的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(A, B)$ (A，B 不同时为 0)，求直线 l 的方程.

解 设 $P(x, y)$为直线 l 上的任意一点.

当点 P 异于点 P_0 时，因为 $\boldsymbol{m}=(A, B)$ 是直线 l 的法向量，所以 $\boldsymbol{m} \perp \overrightarrow{P_0P}$，即 $\boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{P_0P}=0$，从而

$$(A, B) \cdot (x-x_0, y-y_0)=0.$$

因此

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

当点 P 与点 P_0 重合时，显然有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

反之，对于方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ 的任意一组解(x, y)，它满足

$$(A, B) \cdot (x-x_0, y-y_0)=0,$$

从而(x,y)对应的点 P 满足$\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$，即点 P 在直线 l 上.

因此，所求直线 l 的方程为$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

直线 l_1，l_2 不重合.

问题 2 已知直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$(A_1，B_1 不同时为 0)，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$(A_2，B_2 不同时为 0)，利用向量的方法探究两直线平行的条件.

解 直线 l_1 的一个方向向量为$\boldsymbol{a}=(-B_1,A_1)$，直线 l_2 的一个方向向量为$\boldsymbol{b}=(-B_2,A_2)$.

若 $l_1\parallel l_2$，则$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以$(-B_1)A_2-(-B_2)A_1=0$，

即
$$A_1B_2-A_2B_1=0.$$

反之，若$A_1B_2-A_2B_1=0$，则$(-B_1)A_2-(-B_2)A_1=0$，故$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，从而 $l_1\parallel l_2$.

综上，
$$l_1\parallel l_2\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1=0.$$

探究 请你用向量的方法推导：

(1) 直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$ 与直线 l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直的条件；

(2) 点 $P_0(x_0,y_0)$到直线 l：$Ax+By+C=0$(A，B 不同时为 0)的距离公式.

阅 读

解析几何的产生

对于曲线性质的研究，一直是古希腊几何学的一大内容. 古希腊数学家通过对众多曲线的研究，开始对曲线的本质有了统一的认识，他们把曲线看成由符合一定条件的所有点组成的集合，从而把曲线称为动点的轨迹.

认识是统一了，但是在具体的研究中，又各不相同，对于各种不同的曲线，缺少一种一般的表示方法和统一的研究手段.

17 世纪前半叶，一个崭新的数学分支——解析几何学的创立，标志着近代数学的开端，并为数学的应用开辟了广阔的领域. 在创建解析几何学的过程中，法国数学家笛卡儿(R. Descartes，1596—1650)和费马(P. de Fermat，1601—1665)做出了最重要的贡献，成为解析几何学的创立者.


笛卡儿

笛卡儿 1596 年 3 月 31 日出生于法国，1650 年 2 月 11 日卒于瑞典. 1637 年，笛卡儿发表了《几何学》，它确立了笛卡儿在数学史上的地位. 在《几何学》卷一中，笛卡儿用平面上一点到两条固定直线的距离来确定点的位置，用坐标来描述平面上的点.

笛卡儿的解析几何有两个基本的思想：

(1) 用有序数对表示点的坐标；

(2) 把互相关联的两个未知数的代数方程，看成平面上的一条曲线.

对于坐标，笛卡儿与前人所不同的是，他不仅用坐标表示点的位置，而且通过“点动成线”的思想，把坐标具体用到了建立曲线的方程上；对于方程，笛卡儿则不仅把它看成未知数与已知数之间的关系式，而且更多地把它看作两个变量之间的关系式.

这样，他就建立了点和有序实数对之间以及曲线和方程之间的对应关系，从而把研究曲线的几何问题转化为研究方程的代数问题，通过对方程的讨论来研究曲线的几何性质.

费马

费马 1601 年 8 月出生于法国，他是一位业余数学家，被后人誉为“业余数学之王”. 费马在他的《平面和立体轨迹引论》一书中，指出了对轨迹要给予一般的表示，就只能借助于代数.

费马所建立的一般方法，就是坐标法，即通过引进坐标把曲线用代数方程表示出来. 费马所用的坐标实际上是斜角坐标，但是没有标明 y 轴，而且他不用负数. 尽管他的坐标法并不那么简便，但其本质与现代解析几何是一致的.

由此，历史上公认笛卡儿和费马为解析几何的奠基人. 但是笛卡儿和费马的解析几何和现在通用的有很大的不同. 他们的书中都没有出现过现在称为“笛卡儿坐标”的直角坐标系. 笛卡儿是根据问题特点选用他的轴系，仍然属于斜角坐标. 他们的书中都没有使用“坐标”等术语. “坐标”(coordinates)一词是由德国数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646—1716)于 1692 年首先使用的.

我们知道，曲线可以看作按照某种规律运动的点的集合或轨迹. 在平面直角坐标系中，设动点 P 的坐标是 (x, y)，点 P 在运动，它的坐标 x 和 y 也随之相应地变化. 由于点 P 是按照某种规律在运动，因此 x 和 y 这两个变量相互依赖和制约，也就是说，它们之间应满足一定的关系. 这种关系用代数方法表示出来，就可以得到一个含有 x, y 两个变量的方程 $F(x, y)=0$. 这样，就建立了曲线和方程之间的对应关系.

写　作

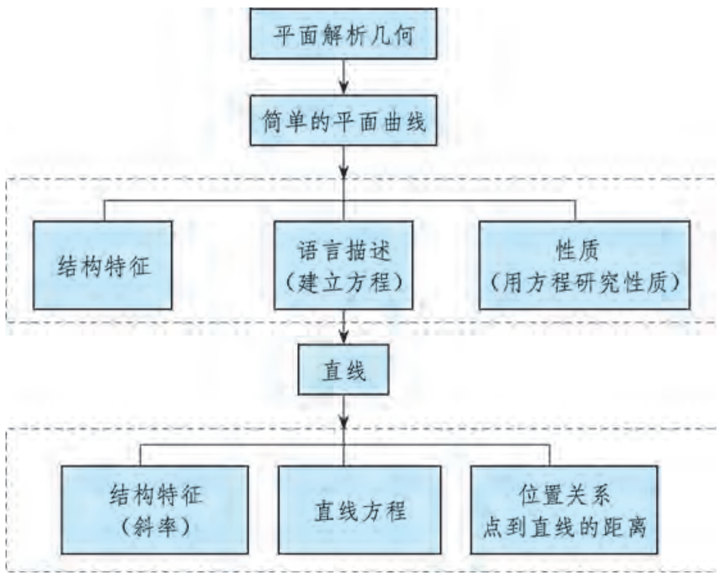
解析几何的形成与发展

收集解析几何的形成与发展的历史资料，撰写论文，论述解析几何发展的过程，重要的结果，解析几何发展中的重要人物、事件及其对人类文明的贡献.

本章回顾

本 章 概 览

本章主要研究了平面直角坐标系中直线的有关知识. 学习本章时，应充分体会用坐标法研究问题的一般思路和基本方法，也就是用坐标、斜率、二元一次方程描述点和直线，建立点与坐标、直线与方程之间的对应关系，进而用代数方法研究与直线有关的问题.



坐标法不仅是研究几何问题的重要方法，而且是一种被广泛用于其他领域的重要数学方法. 通过坐标系，把点和坐标、曲线与方程联系起来，沟通了几何与代数之间的联系，体现了数形结合的重要数学思想.

复习题

感受 · 理解

1. 设 a 为实数，已知直线 $ax+3y-5=0$ 经过点 $A(2,1)$，求 a 的值.

2. 设 a 为实数，已知过两点 $A(-a,3)$，$B(5,-a)$ 的直线的斜率为 1，求 a 的值及 A，B 两点间的距离.

3. 如果 $AC<0$，$BC>0$，那么直线 $Ax+By+C=0$ 不通过（　　）.

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

4. 设 m, n 为实数,若直线 $mx+ny-1=0$ 经过第一、三、四象限,求 m, n 满足的条件.

5. 已知直线 l 过点 $P(-5, -4)$,且与两坐标轴围成的三角形的面积为 5,求直线 l 的方程.

6. 已知直线过点 $P(5, 6)$,它在 x 轴上的截距是在 y 轴上的截距的 2 倍,求此直线的方程.

7. 设 a 为实数,若直线 $x+ay=2a+2$ 与直线 $ax+y=a+1$ 平行,求 a 的值.

8. 已知直线 l_1: $x+3y-7=0$, l_2: $x-y+1=0$, 求经过 l_1 与 l_2 的交点且垂直于 l_1 的直线的方程.

9. 已知点 $A(1, 3)$关于直线 l 的对称点为 $B(-5, 1)$,求直线 l 的方程.

10. 已知光线通过点 $A(2, 3)$,经直线 $x+y+1=0$ 反射,其反射光线通过点 $B(1, 1)$, 分别求入射光线和反射光线所在直线的方程.

11. 已知点 A 与点 $P(1, -1)$的距离为 5,且到 y 轴的距离等于 4,求 A 点的坐标.

12. 设 a 为实数,若两条平行直线 $2x+3y-6=0$ 和 $2x+3y+a=0$ 之间的距离等于 2, 求 a 的值.

13. 已知直线 l 过点 $P(1, 2)$,点 $M(2, 3)$和 $N(4, -5)$到 l 的距离相等,求直线 l 的方程.

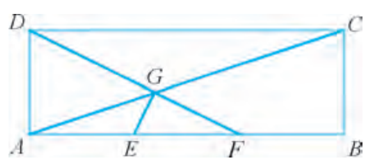
思考·运用

14. 设 k 为实数,已知点 $A(-4, 1)$, $B(3, -1)$,且直线 $y=kx+2$ 与线段 AB 恒有公共点,求 k 的取值范围.

15. 证明:无论 k 取任何实数,直线 $(1+4k)x-(2-3k)y+(2-14k)=0$ 必经过一个定点,并求出定点的坐标.

16. 求函数 $f(x)=\sqrt{(x-1)^2+9}-\sqrt{(x-5)^2+4}$ 的最大值.

17. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,已知 $AB=3AD$, E, F 为 AB 的两个三等分点,AC 与 DF 交于点 G. 建立适当的直角坐标系,求证: $EG\perp DF$.



(第 17 题)

18. 已知$\triangle ABC$ 的一条内角平分线 CD 的方程为 $2x+y-1=0$,两个顶点为 $A(1, 2)$, $B(-1, -1)$,求顶点 C 的坐标.

19. 在直角坐标系 xOy 中,已知射线 OA: $x-y=0(x\geqslant 0)$, OB: $\sqrt{3}x+3y=0\ (x\geqslant 0)$, 过点 $P(1, 0)$ 作直线分别交射线 OA, OB 于点 A, B.

(1) 当线段 AB 的中点为 P 时,求直线 AB 的方程;

(2) 当线段 AB 的中点在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上时,求直线 AB 的方程.

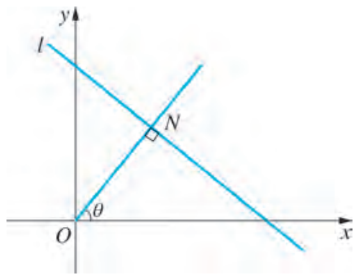
探究·拓展

20. 如图,由原点 O 向直线 l 作垂线 ON,垂足为 N. 设 $ON=p$, ON 与 x 轴正方向所成的角为 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$.

(1) 求证:直线 l 的方程为

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0;$$

(2) 利用上面的方程推导点 $P(x_0,\ y_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离公式.



(第 20 题)

21. 把函数 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 和 $x = b$ 之间的一段图象近似地看作线段,且设 $a < c < b$,试用 $f(a)$,$f(b)$ 估计 $f(c)$.

本章测试

一、填空题

1. 若直线 l 经过点 $A(1,2)$，$B(3,6)$，则 l 的斜率为________.

2. 过点$(3,5)$且斜率为-2的直线的方程为________________.

3. 设 m 为实数，若直线 l：$x-2y+m-1=0$ 在 y 轴上的截距为$\frac{1}{2}$，则 m 的值为________.

4. 过点$(0,1)$且与直线 $2x-y+3=0$ 平行的直线的方程为_____________.

5. 两条平行直线 $4x+3y+3=0$ 与 $8x+6y-9=0$ 间的距离为________.

6. 设 k 为实数，若直线 l：$y-1=k(x-\sqrt{3})$ 不经过第四象限，则 k 的取值范围为________.

二、选择题

7. 若直线 $y=2x+1$ 的斜率为 k，在 y 轴上的截距为 b，则(　　).

A. $k=-\frac{1}{2}$，$b=1$　　B. $k=2$，$b=1$

C. $k=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$　　D. $k=-2$，$b=\frac{1}{2}$

8. 过两点$(-2,4)$和$(4,-1)$的直线在 y 轴上的截距为(　　).

A. $\frac{14}{5}$　　B. $-\frac{14}{5}$　　C. $\frac{7}{3}$　　D. $-\frac{7}{3}$

9. 若$\triangle ABC$的三个顶点为$A(1,0)$，$B(2,1)$，$C(0,2)$，则 BC 边上的高所在直线的方程为(　　).

A. $3x+2y-3=0$　　B. $2x-y-2=0$

C. $2x-y+1=0$　　D. $2x+y-2=0$

10. 若直线 l 与直线 $y=1$ 交于点 P，与直线 $x-y-7=0$ 交于点 Q，且线段 PQ 的中点是$(1,-1)$，则 l 的斜率为(　　).

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{2}{3}$

三、解答题

11. 求过点$(-2,3)$且与直线 $2x+y+1=0$ 垂直的直线 l 的方程.

12. 设 m 为实数，已知三条直线 $x+y-3=0$，$3x-y-1=0$ 和 $2x+3y+m=0$ 相交于一点，求 m 的值.

13. 已知点 $A(2,4)$，直线 l：$x-2y+1=0$，且点 M 在直线 l 上，$AM\perp l$，求点 M 的坐标.

14. 已知直线 l 与直线 $3x+4y=0$ 平行，且与坐标轴围成的三角形的面积为 6，求直线 l 的方程.

15. 过点$(2,3)$的直线 l 被两平行直线 l_1：$2x-5y+9=0$ 与 l_2：$2x-5y-7=0$ 所截得的线段 AB 的中点恰好在直线 $x-4y-1=0$ 上，求直线 l 的方程.

第2章　圆与方程

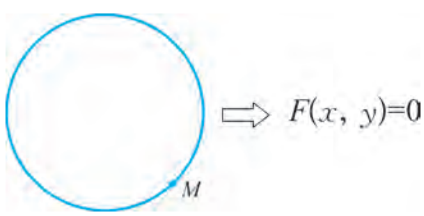
圆与方程

我解决过的每一个问题都成为日后用以解决其他问题的法则.

——笛卡儿

在“直线与方程”一章中，我们借助平面直角坐标系，建立了直线的方程，并通过方程来研究直线的性质和位置关系，初步体会了解析几何研究问题的一般思路和数形结合的思想方法.

圆是常见的几何图形，圆也可以看成满足某种条件的点的集合.在平面直角坐标系中，当点用坐标$(x,\ y)$表示后，圆便可以用一个方程$F(x,\ y)=0$表示，进而通过对方程的研究来研究圆.



- 如何建立圆的方程?
- 如何利用圆的方程研究圆的性质?

2.1 圆的方程

圆是最完美的曲线，它是平面内到定点的距离等于定长的点的集合. 定点就是圆心，定长就是半径.

● 如何建立圆的方程?

以定点 O 为圆心，定长 r 为半径，画出一个圆(图 2－1－1(1))，我们来建立它的方程.

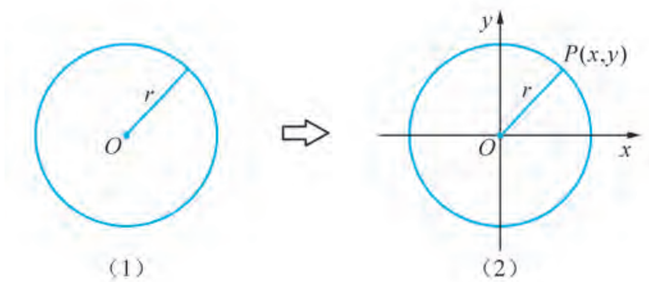


图 2－1－1

第一步　以定点 O 为原点建立直角坐标系(图 2－1－1(2)).
第二步　设 $P(x, y)$是圆上的任意一点.
第三步　依题意，$OP = r$，得

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=r.$$

第四步　化简，得

$$x^2+y^2=r^2.$$

以原点为圆心，半径为 1 的圆通常称为单位圆.

反过来，设(x_0, y_0)是方程 $x^2+y^2=r^2$ 的一组解，即 $x_0{}^2+y_0{}^2=r^2$，从而

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2}=r,$$

所以点 $P_0(x_0, y_0)$满足 $OP_0=r$，即点 P_0在圆 O 上.

因此，所求圆的方程是

$$x^2+y^2=r^2.$$

一般地，设点 $P(x, y)$是以 $C(a, b)$为圆心，r 为半径的圆上的任意一点(图 2－1－2)，则 $CP=r$. 由两点间的距离公式得

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r,$$

即
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \quad ①$$

反过来，若点 P_1 的坐标(x_1, y_1)是方程①的解，则

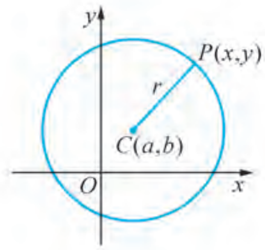


图 2-1-2

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2,$$

即
$$\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}=r.$$

这说明点 $P_1(x_1, y_1)$在以 $C(a, b)$为圆心,r 为半径的圆上.

> 方程
> $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$$
> 叫作以点(a, b)为圆心,r 为半径的**圆的标准方程**(standard equation of circle).

确定圆的标准方程,只要确定方程中的三个常数 a, b, r.

例 1 求圆心是 $C(2, -3)$,且经过坐标原点的圆的方程.

解 因为圆 C 经过坐标原点,所以圆 C 的半径是

$$r=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}.$$

因此,所求圆的方程是

$$(x-2)^2+(y+3)^2=13.$$

例 2 已知隧道的截面是半径为 4 m 的半圆,车辆只能在道路中心线一侧行驶,一辆宽为 2.7 m,高为 3 m 的货车能不能驶入这个隧道?

解 以某一截面半圆的圆心为坐标原点,半圆的直径 AB 所在的直线为 x 轴,建立直角坐标系(图 2-1-3),那么半圆的方程为

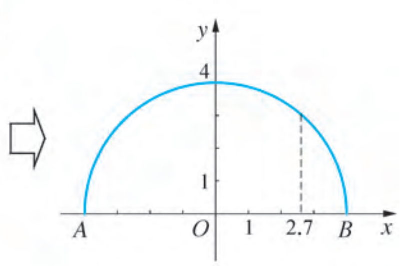


图 2-1-3

$$x^2+y^2=16(y\geqslant 0).$$

将 $x=2.7$ 代入,得

$$y=\sqrt{16-2.7^2}=\sqrt{8.71}<3,$$

即在离中心线 2.7 m 处,隧道的高度低于货车的高度.

因此,货车不能驶入这个隧道.

思 考

假设货车的最大宽度为 a m,那么货车要驶入该隧道,限高为多少?

由圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

得

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

由此可见,圆的方程具有如下形式:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \qquad ②$$

其中 D, E, F 为常数.

那么,形如②的方程是否都表示圆呢?

由方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(D^2+E^2-4F). \qquad ③$$

与圆的标准方程比较,可知:

(1) 当

$$D^2+E^2-4F>0$$

时,方程②表示以点 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ 为圆心,$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 为半径的圆;

(2) 当

$$D^2+E^2-4F=0$$

时,方程②只有一解,表示一个点 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$;

(3) 当

$$D^2+E^2-4F<0$$

时,方程②无实数解,不表示任何图形.

确定圆的一般方程,只要确定方程中的三个常数 D, E, F.

方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\ (D^2+E^2-4F>0)$$

叫作**圆的一般方程**(general equation of circle).

例 3 已知△ABC 的三个顶点为 $A(4,3)$，$B(5,2)$，$C(1,0)$，求△ABC 外接圆的方程.

解 设所求圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

因为点 A，B，C 在所求的圆上，所以

$$\begin{cases}4D+3E+F+25=0,\\5D+2E+F+29=0,\\D+F+1=0,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}D=-6,\\E=-2,\\F=5.\end{cases}$$

故所求圆的方程是

$$x^2+y^2-6x-2y+5=0.$$

思 考

本题还有其他解法吗?

例 4 已知点 $M(x,y)$到两个定点 $A(-3,0)$，$B(3,0)$的距离之比为 2，求 x，y 满足的关系式，并指出满足条件的点 M 所构成的曲线.

解 依题意，点 M 满足

$$\frac{MA}{MB}=2.$$

由 $MA=\sqrt{(x+3)^2+y^2}$，$MB=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$，得

$$\frac{\sqrt{(x+3)^2+y^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}=2.$$

化简整理，得

$$x^2+y^2-10x+9=0. \qquad (*)$$

反过来，可以验证，当 x，y 满足(∗)式时，点 M 到点 A，B 的距离之比为 2.

因此 x，y 满足的关系式为

$$x^2+y^2-10x+9=0.$$

由 $x^2+y^2-10x+9=0$，得

$$(x-5)^2+y^2=16.$$

因此，满足条件的点 M 所构成的曲线为以点$(5,0)$为圆心，4 为半径的圆.

满足条件的点 M 所构成的曲线即为动点 M 的轨迹，对应的方程即为动点 M 的轨迹方程.

思　考

已知平面上两个定点 A，B，动点 M 满足 $\dfrac{MA}{MB}=\lambda(\lambda>0)$，则点 M 的轨迹是什么？建立适当的直角坐标系，写出点 M 的轨迹方程.

例 5　某圆拱梁的示意图如图 2－1－4 所示. 该圆拱的跨度 AB 是 36 m，拱高 OP 是 6 m，在建造时，每隔 3 m 需要一个支柱支撑，求支柱 A_2P_2 的长(精确到 0.01 m).

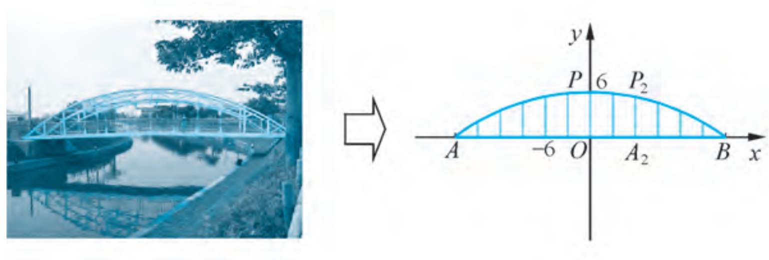


图 2－1－4

解　以线段 AB 所在的直线为 x 轴，线段 AB 的中点 O 为坐标原点，建立直角坐标系 xOy，那么点 A，B，P 的坐标分别为 $(-18,0)$，$(18,0)$，$(0,6)$.

设圆拱所在的圆的方程是

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

因为点 A，B，P 在所求的圆上，所以

$$\begin{cases}18^2+18D+F=0,\\18^2-18D+F=0,\\6^2+6E+F=0,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}D=0,\\E=48,\\F=-324.\end{cases}$$

故圆拱所在的圆的方程是

$$x^2+y^2+48y-324=0.$$

将点 P_2 的横坐标 $x=6$ 代入上述方程，解得

$$y=-24+12\sqrt{6}\approx 5.39(\text{负值舍去}).$$

答　支柱 A_2P_2 的长约为 5.39 m.

练　习

1. 分别根据下列条件，求出圆的方程：

(1) 圆心在原点，半径为 6；

(2) 圆心为点$(3, -4)$，半径为$\sqrt{5}$；

(3) 过点 $P(6, 3)$，圆心为 $C(2, -2)$；

(4) 过原点，圆心为点$(1, 2)$.

2. 分别根据下列条件，求出圆的方程：

(1) 圆心为 $C(-1, -5)$，且与 y 轴相切；

(2) 圆心为 $C(1, 3)$，且与直线 $3x-4y-6=0$ 相切；

(3) 半径为 2，且与 x 轴相切于原点；

(4) 过点 $M(0, 1)$，$N(2, 1)$，半径为$\sqrt{5}$.

3. (1) 已知点 $A(-4, -5)$，$B(6, -1)$，求以线段 AB 为直径的圆的方程；

(2) 求圆心在直线 $y=-x$ 上，且过两点 $A(2, 0)$，$B(0, -4)$ 的圆的方程.

4. 下列各方程是否表示圆？若表示圆，求其圆心的坐标和半径.

(1) $x^2+y^2-4x=0$；

(2) $x^2+y^2-4x-2y+5=0$；

(3) $x^2+y^2+x+2y+2=0$.

5. 分别判断点 $A(1, 1)$，$B(1, \sqrt{3})$，$C(1, 2)$与圆 $x^2+y^2=4$ 的位置关系.

6. 求过三点 $A(4, 1)$，$B(-6, 3)$，$C(3, 0)$的圆的方程.

7. 如果方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(D^2+E^2-4F>0)$ 表示的曲线关于直线 $y=x$ 对称，那么必有(　　).

A. $D=E$　　B. $D=F$

C. $E=F$　　D. $D=E=F$

8. 设 m 为实数，若方程 $x^2+y^2+4mx-2y+4m^2-m=0$ 表示圆，求 m 的取值范围.

习题 2.1

感受·理解

1. 分别根据下列条件，求圆的方程：

(1) 过点 $P(-2, 2)$，圆心为 $C(3, 0)$；

(2) 与两坐标轴都相切，且圆心在直线 $2x-3y+5=0$ 上；

(3) 过点 $A(3, 5)$，$B(-3, 7)$，且圆心在 x 轴上；

(4) 过点 $A(-4, 0)$，$B(0, 2)$和原点.

2. 已知圆的内接正方形相对的两个顶点分别是 $A(5, 6)$，$C(3, -4)$，求这个圆的方程.

3. 已知半径为 5 的圆过点 $P(-4, 3)$，且圆心在直线 $2x-y+1=0$ 上，求这个圆的方程.

4. 已知$\triangle ABC$ 的顶点为 $A(-1, 5)$，$B(5, 5)$，$C(6, -2)$，求$\triangle ABC$ 的外接圆的方程.

5. 证明：$M(2, 0)$，$N(10, 0)$，$P(11, 3)$，$Q(10, 6)$四点共圆.

6. 设 b 为实数，若圆 $x^2+y^2+4x+2by+b^2=0$ 与 x 轴相切，求 b 的值.

7. 求过两点 $A(0, 4)$，$B(4, 6)$，且圆心在直线 $x-2y-2=0$ 上的圆的标准方程.

8. 已知线段 AB 的长为 2，动点 M 到 A，B 两点的距离的平方和为 10，求点 M 的轨迹.

思考·运用

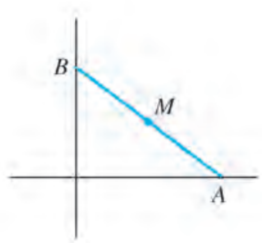
9. 设 a 为实数，若点 $P(1, 1)$ 在圆 $(x-a)^2+(y+a)^2=4$ 的内部，求 a 的取值范围.

10. 画出方程 $x-1=\sqrt{1-y^2}$ 表示的曲线.

11. 求圆 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$ 关于直线 $x-y+3=0$ 对称的圆的方程.

12. 已知点 $M(x, y)$ 到两个定点 $O(0, 0)$，$A(3, 0)$ 的距离之比为 $\dfrac{1}{2}$，问：点 M 的坐标应满足什么关系？画出满足条件的点 M 所构成的曲线.

13. 如图，长为 $2a$（a 是正常数）的线段 AB 的两个端点 A，B 分别在互相垂直的两条直线上滑动，求线段 AB 的中点 M 的轨迹.

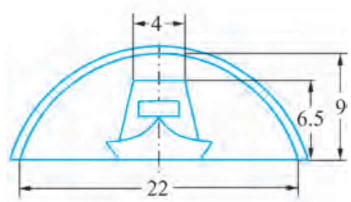


（第 13 题）

探究·拓展

14. 已知点 $A(4, 0)$，若 P 是圆 $x^2+y^2=4$ 上的一个动点，点 $Q(x, y)$ 是线段 AP 的中点，求点 Q 的轨迹方程.

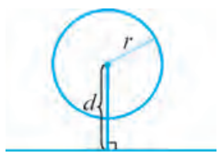
15. 河道上有一座圆拱桥，在正常水位时，拱圈最高点距水面 9 m，拱圈内水面宽 22 m. 一条船在水面以上部分高 6.5 m，船顶部宽 4 m，可以通行无阻. 近日水位暴涨了 2.7 m，为此，必须加重船载，降低船身，才能通过桥洞. 试问：船身应该降低多少？



（第 15 题）

2.2 直线与圆的位置关系

我们知道，在平面几何中，直线与圆有三种位置关系，即相离、相切和相交，而圆心到直线的距离 d 与圆的半径 r 之间的大小关系决定了直线与圆的位置关系.

相　　离	相　　切	相　　交
		
$d > r$	$d = r$	$d < r$

在平面直角坐标系中，直线与圆都可以用方程来表示，那么，

● 怎样根据方程来判断直线与圆的位置关系呢？

设直线 l 和圆 C 的方程分别为

$$Ax+By+C=0,\ x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

如果直线 l 与圆 C 有公共点，那么公共点的坐标一定是这两个方程的公共解；反之，如果这两个方程有公共解，那么以公共解为坐标的点必是直线 l 与圆 C 的公共点.

直线 l 与圆 C 的方程联立方程组

$$\begin{cases} Ax+By+C=0, \\ x^2+y^2+Dx+Ey+F=0. \end{cases}$$

我们有如下结论：

方程组无解	方程组仅有一组解	方程组有两组不同的解
直线与圆没有公共点	直线与圆有且只有一个公共点	直线与圆有两个公共点
相离	相切	相交

例 1　求直线 $4x+3y=40$ 和圆 $x^2+y^2=100$ 的公共点的坐标，并判断它们的位置关系.

解 直线 $4x+3y=40$ 和圆 $x^2+y^2=100$ 的公共点的坐标就是方程组

$$\begin{cases}4x+3y=40,\\x^2+y^2=100\end{cases}$$

的解.

解这个方程组,得

$$\begin{cases}x_1=10,\\y_1=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=\dfrac{14}{5},\\y_2=\dfrac{48}{5}.\end{cases}$$

所以公共点的坐标为$(10, 0)$, $\left(\dfrac{14}{5}, \dfrac{48}{5}\right)$.

因为直线 $4x+3y=40$ 和圆 $x^2+y^2=100$ 有两个公共点,所以直线和圆相交.

例 2 自点 $A(-1, 4)$ 作圆$(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 的切线 l,求切线 l 的方程.

解法 1 当直线 l 垂直于 x 轴时,直线 l: $x=-1$ 与圆相离,不满足条件.

当直线 l 不垂直于 x 轴时,可设直线 l 的方程为

$$y-4=k(x+1),$$

即
$$kx-y+(k+4)=0.$$

如图 2-2-1,因为直线与圆相切,所以圆心$(2, 3)$到直线 l 的距离等于圆的半径,从而

$$\frac{|2k-3+(k+4)|}{\sqrt{k^2+1}}=1,$$

解得
$$k=0 \text{ 或 } k=-\frac{3}{4}.$$

因此,所求直线 l 的方程是 $y=4$ 或 $3x+4y-13=0$.

当点 A 的坐标为$(2, 2)$或$(1, 1)$时,结果分别有什么变化?

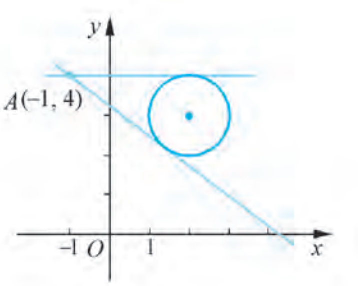


图 2-2-1

解法 2 当直线 l 垂直于 x 轴时,直线 l: $x=-1$ 与圆相离,不满

足条件.

当直线 l 不垂直于 x 轴时，可设直线 l 的方程为

$$y-4=k(x+1).$$

因为直线 l 与圆相切，所以方程组

$$\begin{cases} y-4=k(x+1), \\ (x-2)^2+(y-3)^2=1 \end{cases}$$

仅有一组解.

由方程组消去 y，得到关于 x 的一元二次方程

$$(1+k^2)x^2+(2k^2+2k-4)x+k^2+2k+4=0.$$

依题意，这个一元二次方程有两个相等的实数根，所以判别式

$$\Delta=(2k^2+2k-4)^2-4(1+k^2)(k^2+2k+4)=0,$$

解得 $$k=0 \text{ 或 } k=-\frac{3}{4}.$$

因此，所求直线 l 的方程是 $y=4$ 或 $3x+4y-13=0$.

例 3 求直线 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ 被圆 $x^2+y^2=4$ 截得的弦长.

解法 1 直线 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ 和圆 $x^2+y^2=4$ 的公共点的坐标就是方程组

$$\begin{cases} x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

的解.

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x_1=-\sqrt{3}, \\ y_1=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=0, \\ y_2=2, \end{cases}$$

所以公共点的坐标为 $(-\sqrt{3},\ 1)$，$(0,\ 2)$.

从而知直线 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ 被圆 $x^2+y^2=4$ 截得的弦长为

$$\sqrt{(-\sqrt{3}-0)^2+(1-2)^2}=2.$$

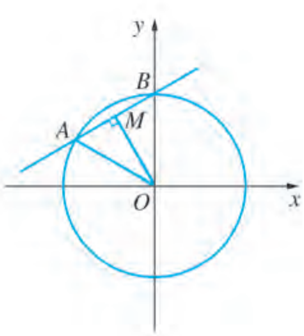


图 2-2-2

解法 2 如图 2-2-2，设直线 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 交于 A，B 两点，弦 AB 的中点为 M，则 $OM\perp AB$（O 为坐标原点），所以

$$OM=\frac{|0-0+2\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=\sqrt{3},$$

从而

$$AB = 2AM = 2\sqrt{OA^2 - OM^2} = 2\sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 2.$$

练　习

1. 分别根据下列条件，判断直线 l 与圆 C 的位置关系：

(1) l：$x+y-1=0$，　　C：$x^2+y^2=4$；

(2) l：$4x-3y-8=0$，　　C：$x^2+(y+1)^2=1$；

(3) l：$x+y-4=0$，　　C：$x^2+y^2+2x=0$；

(4) l：$y=0$，　　C：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

2. 设 a，b 为实数，若直线 $ax+by=1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交，则点 $P(a, b)$ 与圆的位置关系是(　　).

A. 在圆上　　B. 在圆外

C. 在圆内　　D. 不能确定

3. (1) 求过点$(1, \sqrt{3})$且与圆 $x^2+y^2=4$ 相切的直线的方程；

(2) 求过原点且与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 相切的直线的方程；

(3) 求与圆 $x^2+y^2=8$ 相切，且斜率为 -1 的直线的方程.

4. 设 a 为实数，若直线 $2x+y+a=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x+4y=0$ 没有公共点，求 a 的取值范围.

5. 求直线 $x+2y-3=0$ 被圆$(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 截得的弦长.

6. 从圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 外一点 $P(2, 3)$ 向圆引切线，求此切线的长.

7. 若一个圆的圆心在直线 $y=-2x$ 上，且此圆与直线 $y=1-x$ 相切于点$(2, -1)$，求此圆的方程.

习题 2.2

感受・理解

1. 分别根据下列条件，判断直线 l 与圆 C 的位置关系：

(1) l：$x+y+4=0$，　　C：$x^2+y^2=2$；

(2) l：$3x-4y+4=0$，　　C：$(x-2)^2+y^2=4$；

(3) l：$2x+y-1=0$，　　C：$x^2+(y-2)^2=1$.

2. 过点 $P(-3, -4)$ 作直线 l，当 l 的斜率为何值时：

(1) 直线 l 将圆$(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 平分?

(2) 直线 l 与圆$(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 相切?

(3) 直线 l 与圆$(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 相交，且所截得的弦长为 2?

3. 已知过点 $A(-1, -1)$ 的直线 l 与圆 $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ 相交，求直线 l 的斜率的取值范围.

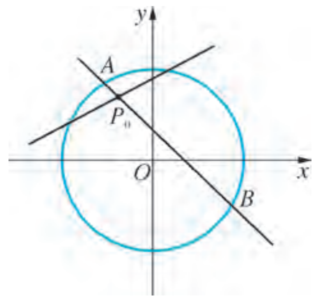
4. 求半径为$\sqrt{13}$，且与直线 $2x+3y-10=0$ 相切于点 $P(2, 2)$ 的圆的方程.

5. 若一个圆的圆心在 y 轴上，且此圆与直线 l_1：$4x-3y+12=0$，直线 l_2：$3x-4y-12=0$ 都相切，求此圆的方程.

6. 若一个圆的圆心在直线 $3x-y=0$ 上，此圆与 x 轴相切，且被直线 $x-y=0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{7}$，求此圆的方程.

思考·运用

7. 如图，圆 $x^2+y^2=8$ 内有一点 $P_0(-1, 2)$，AB 为过点 P_0 且倾斜角为 α 的弦.



（第 7 题）

(1) 当 $\alpha=135^\circ$ 时，求弦 AB 的长；

(2) 当弦 AB 被点 P_0 平分时，求直线 AB 的方程.

8. 已知直线 l 经过点 $P_0(3, -1)$，且被圆 $x^2+y^2-8x-2y+12=0$ 截得的弦长为 4，求 l 的方程.

9. 设 k 为实数，证明：无论 k 取何值，直线 l：$kx-y-4k+3=0$ 与圆 C：$x^2+y^2-6x-8y+21=0$ 都有两个交点.

10. 已知圆 C 的方程是 $x^2+y^2=r^2$，求证：经过圆 C 上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程是 $x_0x+y_0y=r^2$.

11. 设 b 为实数，已知圆 $x^2+y^2=4$，直线 l：$y=x+b$. 当 b 为何值时，圆 $x^2+y^2=4$ 上恰有 3 个点到直线 l 的距离都等于 1？

探究·拓展

12. 对于圆 C：$x^2+y^2=r^2$，直线 l：$ax+by=r^2$，分别根据下列条件，判断直线 l 与圆 C 的位置关系：

(1) 点 $P(a, b)$ 在圆 C 上；

(2) 点 $P(a, b)$ 在圆 C 外.

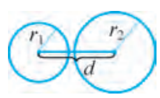
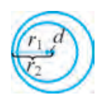
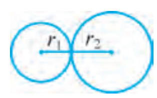
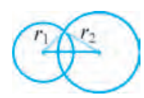
2.3 圆与圆的位置关系

我们知道，在平面几何中，圆与圆的位置关系有：外离、外切、相交、内切和内含. 这五种位置关系可以通过下面的步骤来判断：

第一步　计算两圆的半径 r_1，r_2；

第二步　计算两圆的圆心距 d；

第三步　根据 d 与 r_1，r_2 之间的关系，判断两圆的位置关系.

外　离	内　含	外　切	内　切	相　交
				
$d>r_1+r_2$	$d<\lvert r_1-r_2\rvert$	$d=r_1+r_2$	$d=\lvert r_1-r_2\rvert$	$\lvert r_1-r_2\rvert<d<r_1+r_2$

在平面直角坐标系中，圆可以用方程来表示，那么，

● 怎样根据方程来判断圆与圆的位置关系呢？

设圆 C_1 和圆 C_2 的方程分别为

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,$$
$$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0.$$

如果圆 C_1 和圆 C_2 有公共点，那么公共点的坐标一定是这两个方程的公共解；反之，这两个方程有公共解，那么，以公共解为坐标的点必是圆 C_1 和圆 C_2 的公共点.

圆 C_1 和圆 C_2 的方程联立方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0, \\ x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0. \end{cases}$$

我们有如下结论：

方程组无解		方程组仅有一组解		方程组有两组不同的解
两个圆没有公共点		两个圆有且只有一个公共点		两个圆有两个公共点
外离	内含	外切	内切	相交

例 1　判断下列两个圆的位置关系：

(1) $(x+2)^2+(y-2)^2=1$ 与 $(x-2)^2+(y-5)^2=16$；

(2) $x^2+y^2-2x-3=0$ 与 $x^2+y^2-4x+2y+3=0$.

解　(1) 根据题意得，两个圆的半径分别为 $r_1=1$ 和 $r_2=4$，两个圆的圆心距

$$d=\sqrt{[2-(-2)]^2+(5-2)^2}=5.$$

因为 $$d=r_1+r_2,$$

所以两个圆外切.

(2) **方法 1** 将两个圆的方程联立方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x-3=0, & ①\\ x^2+y^2-4x+2y+3=0. & ②\end{cases}$$

①−②,得 $$x-y-3=0. \quad ③$$

二元一次方程③表示的直线与两个圆之间有怎样的关系?能说明理由吗?

由③,得 $$y=x-3.$$

代入①式,并整理,得

$$x^2-4x+3=0,$$

解得 $$x_1=1,\ x_2=3.$$

从而 $y_1=-2$, $y_2=0$, 即方程组有两组不同的解,所以两个圆相交.

方法 2 将两个圆的方程都化为标准方程,得

$$(x-1)^2+y^2=4,\ (x-2)^2+(y+1)^2=2.$$

那么两个圆的半径分别为 $r_1=2$ 和 $r_2=\sqrt{2}$, 两个圆的圆心距

$$d=\sqrt{(1-2)^2+[0-(-1)]^2}=\sqrt{2}.$$

因为 $$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2,$$

所以两个圆相交.

例 2 求过点 $A(0,6)$ 且与圆 C: $x^2+y^2+10x+10y=0$ 相切于原点的圆的方程.

分析 如图 2-3-1,所求圆经过原点和 $A(0,6)$,且圆心应在已知圆的圆心与原点的连线上. 根据这三个条件可确定圆的方程.

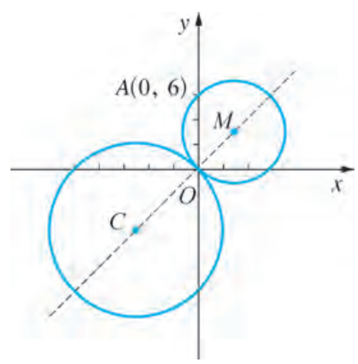


图 2-3-1

解 将圆 C 的方程化为标准方程,得

$$(x+5)^2+(y+5)^2=50,$$

则圆心为 $C(-5, -5)$，半径为 $5\sqrt{2}$.

所以经过此圆心和原点的直线的方程为 $x-y=0$.

设所求圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

由题意知，$O(0, 0)$，$A(0, 6)$在所求圆上，且圆心 $M(a, b)$在直线 $x-y=0$ 上，则有

$$\begin{cases}(0-a)^2+(0-b)^2=r^2,\\(0-a)^2+(6-b)^2=r^2,\\a-b=0.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}a=3,\\b=3,\\r=3\sqrt{2}.\end{cases}$$

本题还有其他解法吗？

因此，所求圆的方程是

$$(x-3)^2+(y-3)^2=18.$$

练　习

1. 分别根据下列条件，判断两个圆的位置关系：

   (1) $(x-3)^2+(y+2)^2=1$ 与 $(x-7)^2+(y-1)^2=36$；

   (2) $x^2+y^2-4x+2y=0$ 与 $x^2+y^2-2x-2y=0$.

2. 设 m 为实数，若圆 $x^2+y^2=m$ 与圆 $x^2+y^2+6x-8y-11=0$ 相交，求 m 的取值范围.

3. 两圆 C_1：$x^2+y^2=1$ 与 C_2：$(x+3)^2+y^2=4$ 的公切线有几条？

4. 求过点 $A(1, -1)$ 且与圆 C：$x^2+y^2=100$ 相切于点 $B(8, 6)$ 的圆的方程.

5. 已知圆 C_1：$x^2+y^2=1$，圆 C_2：$x^2+y^2-2x-2y+1=0$，试求这两个圆的公共弦所在直线的方程.

习题 2.3

感受·理解

1. 分别根据下列条件，判断两个圆的位置关系：

   (1) $x^2+y^2-10x-10y=0$ 和 $x^2+y^2+6x+2y-40=0$；

   (2) $x^2+y^2-6x+4y+12=0$ 和 $x^2+y^2-14x-2y+14=0$.

2. 设 a 为正实数，若圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 与圆 $x^2+y^2=25$ 没有公共点，求 a 的取值范围.

3. 已知以 $C(-4, 3)$为圆心的圆与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，求圆 C 的方程.

4. 若一个圆的圆心在直线 $x-y-4=0$ 上，且此圆经过圆 $x^2+y^2+6x-4=0$ 与圆 $x^2+y^2+6y-28=0$ 的交点，求此圆的方程.

5. 若一个圆经过点 $M(3, -1)$，且与圆 $x^2+y^2+2x-6y+5=0$ 相切于点 $N(1, 2)$，求此圆的方程.

思考·运用

6. 求圆 $x^2+y^2=9$ 与圆 $x^2+y^2-4x+2y-3=0$ 的公共弦的长.

7. 若一个圆经过点 $M(2,-2)$ 及圆 $x^2+y^2-6x=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 的交点，求此圆的方程.

探究·拓展

8. 设 a, b 为实数，已知圆 P：$x^2+y^2=9$，点 $Q(a, b)$ 在圆 P 外，以线段 PQ 为直径作圆 M，与圆 P 相交于 A，B 两点.

(1) 试分别确定直线 QA，QB 与圆 P 的位置关系.

(2) 当 $QA=QB=4$ 时，点 Q 在什么曲线上运动?

(3) 当 $a=-2$，$b=-3$ 时，求直线 AB 的方程.

问题与探究

圆的切线与切点弦

若 $P_0(x_0, y_0)$是圆 O: $x^2+y^2=r^2$ 上一点，则圆 O 的过点 P_0的切线方程是 $x_0x+y_0y=r^2$.

事实上，因为点 $P_0(x_0, y_0)$ 在圆 O: $x^2+y^2=r^2$ 上，所以 $x_0^2+y_0^2=r^2$，即 $x_0 \cdot x_0+y_0 \cdot y_0=r^2$，从而点 P_0在直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 上.

又因为圆心 O 到直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 的距离

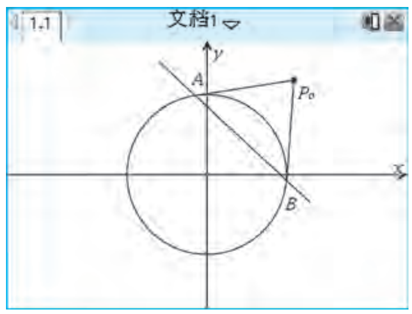
$$d=\frac{r^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=r,$$

所以 $x_0x+y_0y=r^2$ 是圆 O 的过点 P_0的切线方程.

尝试用其他方法证明 $x_0x+y_0y=r^2$ 是圆 O 的过点 P_0 的切线方程.

当点 $P_0(x_0, y_0)$ 在圆 O 外时，方程 $x_0x+y_0y=r^2$ 表示怎样的直线呢？

如图，过 $P_0(x_0, y_0)$作圆 O 的两条切线，切点分别为A，B.



设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则直线 P_0A 的方程为

$$x_1x+y_1y=r^2.$$

因为 $P_0(x_0, y_0)$ 在直线 P_0A 上，所以

$$x_1x_0+y_1y_0=r^2,$$

故(x_1, y_1)满足方程

$$x_0x+y_0y=r^2,$$

即点 A 在直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 上.

同理点 B 在直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 上.

所以 $x_0x+y_0y=r^2$ 是直线 AB 的方程，即切点弦所在直线的方程.

探究：当点 $P_0(x_0, y_0)$ 在圆 O 内(异于 O)时，方程 $x_0x+y_0y=r^2$ 表示怎样的直线呢？

阅 读

希尔伯特（D. Hilbert，1862—1943），德国数学家，在几何和数学基础方面有影响深远的研究.

数学问题(节选)

只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示着这门科学独立发展的衰亡或中止. 正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题. 正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁意志，发现新方法和新观点，达到更为广阔和自由的境界.

一个数学问题应该是困难的，但却不应该是完全不可解决而致使我们白费力气的. 在通向那隐藏的真理的曲折道路上，它应该是指引我们前进的一盏明灯，并最终以成功的喜悦作为对我们的报偿.

在解决一个数学问题时，如果我们没有获得成功，原因常常在于我们没有认识到更一般的观点，即眼下要解决的问题不过是一连串有关问题中的一个环节. 采取这样的观点之后，不仅使我们所研究的问题更容易得到解决，同时还会获得一种能应用于有关问题的普遍方法. 这种寻求一般方法的途径肯定是最行得通也是最可靠的，因为手中没有明确的问题而去寻求一般方法的人，他们的工作多半是徒劳无益的.

在讨论数学问题时，我们相信特殊化比一般化起着更为重要的作用. 可能在大多数场合，我们寻找一个问题的答案而未能成功的原因在于这样的事实，即有一些比手头的问题更简单、更容易的问题没有完全解决或是完全没有解决. 这时，一切都有赖于找出这些比较容易的问题，并使用尽可能完善的方法和能够推广的概念来解决它们. 这种方法是克服数学困难的最重要的杠杆之一，我认为人们是经常使用它的，虽然也许并不自觉.

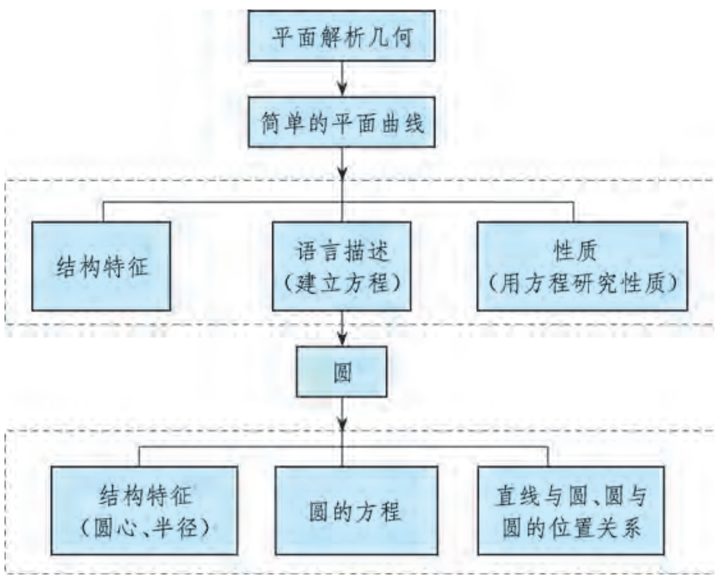
有时会碰到这样的情况：我们是在不充分的前提下或不正确的意义上寻求问题的解答，因此不能获得成功. 于是就会产生这样的任务：证明在所给的前提和所考虑的意义下原来的问题是不可能解决的.

说明：本文是德国数学家希尔伯特在1900年巴黎国际数学家代表会上的讲演的节选. 在这次大会上，希尔伯特提出了23个数学问题，对20世纪的数学发展产生了较大的影响.

本章回顾

本 章 概 览

本章再一次借助平面直角坐标系，运用坐标法，研究了圆的有关知识. 学习本章时，应该进一步体会用坐标法研究问题的一般思路和基本方法，也就是在明确了圆的定义，即圆上的点到圆心的距离为定值后，通过建立直角坐标系，将圆转化为方程，进而通过圆的方程等代数方法来研究点与圆、直线与圆、圆与圆之间的位置关系.



本章以圆为载体，再一次展示了坐标法这一研究几何曲线的重要数学方法，即通过坐标系，把圆与方程联系起来，沟通了圆与方程之间的联系，体现了数形结合的重要数学思想.

圆的标准方程和一般方程都含有三个参变量(标准方程中为 a，b，r；一般方程中为 D，E，F)，也就是说，从解方程的角度看，要确定一个圆的方程，需要三个独立的条件，这与不共线的三点确定一个圆是一致的.

复习题

感受・理解

1. 已知圆经过点 $P(1, 1)$和坐标原点，且圆心在直线 $2x+3y+1=0$ 上，求圆的方程.

2. 已知圆经过三点 $A(1, 12)$，$B(7, 10)$，$C(-9,2)$，求圆的方程.

3. 已知直线 $3x-4y+12=0$ 与两坐标轴分别交于点 A，B，求以线段 AB 为直径的圆的方程.
4. 求圆 $x^2+y^2-4x+4y+4=0$ 被直线 $x-y-5=0$ 所截得的弦长.
5. 已知一直线与圆 C：$x^2+(y+5)^2=3$ 相切，且在 x 轴、y 轴上的截距相等，求此直线的方程.
6. 已知圆 C 的半径为 1，圆心在第一象限，若圆 C 与 y 轴相切，与 x 轴相交于点 A，B，且 $AB=\sqrt{3}$，求圆 C 的方程.
7. 判断两个圆 $x^2+y^2+x-2y-20=0$ 与 $x^2+y^2=25$ 的位置关系.
8. 若一个圆过点 $P(4,-1)$，且与圆 C：$x^2+y^2+2x-6y+5=0$ 相切于点 $M(1,2)$，求此圆的方程.

赵州桥

9. 河北省赵县的赵州桥，是世界上现存最古老的石拱桥之一. 赵州桥的跨度约为 37.4 m，圆拱高约为 7.2 m. 试建立适当的直角坐标系，求出这个圆拱所在的圆的方程.
10. 已知圆 O：$x^2+y^2=1$ 和定点 $A(4,0)$，P 为圆 O 外一点，直线 PQ 与圆 O 相切于点 Q. 若 $PQ=2PA$，求点 P 的轨迹方程.

思考・运用

11. 已知 $M(1,0)$ 是圆 C：$x^2+y^2-4x-2y=0$ 内一点，求过点 M 的最短弦所在直线的方程.
12. 设 k 为实数，若直线 $y=kx+3$ 与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 相交于 M，N 两点，且 $MN\geqslant 2\sqrt{3}$，求 k 的取值范围.
13. 光线沿直线 $3x+4y+6=0$ 射入，经过 x 轴反射后，反射光线与以点 $(2,8)$ 为圆心的圆 C 相切，求圆 C 的方程.
14. 已知两圆 $x^2+y^2=10$ 和 $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ 相交于 A，B 两点，求直线 AB 的方程.
15. 设 r 为正实数，若集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$，$N=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant r^2\}$. 当 $M\cap N=N$ 时，求 r 的取值范围.
16. 设 b 为实数，若直线 $y=x+b$ 与曲线 $x=\sqrt{1-y^2}$ 恰有一个公共点，求 b 的取值范围.

探究・拓展

17. 已知圆 C：$x^2+y^2-2x+4y-4=0$，是否存在斜率为 1 的直线 l，使以 l 被圆 C 截得的弦 AB 为直径的圆过原点？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，说明理由.
18. 已知直线 l：$x=-2$ 和圆 C：$(x-3)^2+y^2=1$. 若圆 M 与直线 l 相切，与圆 C 外切，求圆 M 的圆心 M 的轨迹方程.

本章测试

一、填空题

1. 圆心为点$(-1, 1)$，半径为 3 的圆的方程为____________.

2. 圆 $x^2+y^2-2x+4y=0$ 的面积为________.

3. 经过两点$(3, 5)$和$(-3, 7)$，且圆心在 x 轴上的圆的方程为____________.

4. 圆 $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ 关于 x 轴对称的圆的方程为____________.

5. 设 m 为实数，若方程 $x^2+y^2-2x+4y+m=0$ 表示圆，则 m 的取值范围为________.

6. 圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 上的点到直线 $x-y=2$ 的距离的最大值为________.

二、选择题

7. 已知圆的内接正方形的一条对角线上的两个顶点的坐标分别是$(5, 6)$，$(3, -4)$，则这个圆的方程为(　　).

A. $x^2+y^2+4x-2y+7=0$　　B. $x^2+y^2-8x-2y-9=0$

C. $x^2+y^2+8x+2y-6=0$　　D. $x^2+y^2-4x+2y-5=0$

8. 过圆 $x^2+y^2=5$ 上一点 $M(1, -2)$作圆的切线 l，则 l 的方程为(　　).

A. $x+2y-3=0$　　B. $x-2y-5=0$

C. $2x-y-5=0$　　D. $2x+y-5=0$

9. 圆 O_1：$x^2+y^2-2x=0$ 与圆 O_2：$x^2+y^2+4y=0$ 的位置关系为(　　).

A. 外离　　B. 外切　　C. 相交　　D. 内切

10. 若圆 $(x+2\sqrt{3})^2+(y-2\sqrt{7})^2=r^2$ 与 x 轴相切，则这个圆截 y 轴所得的弦长为(　　).

A. $2\sqrt{7}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. 6　　D. 8

三、解答题

11. 若圆 C 过两点 $A(0, 4)$，$B(4, 6)$，且圆心在直线 $x-2y-2=0$ 上，求圆 C 的标准方程.

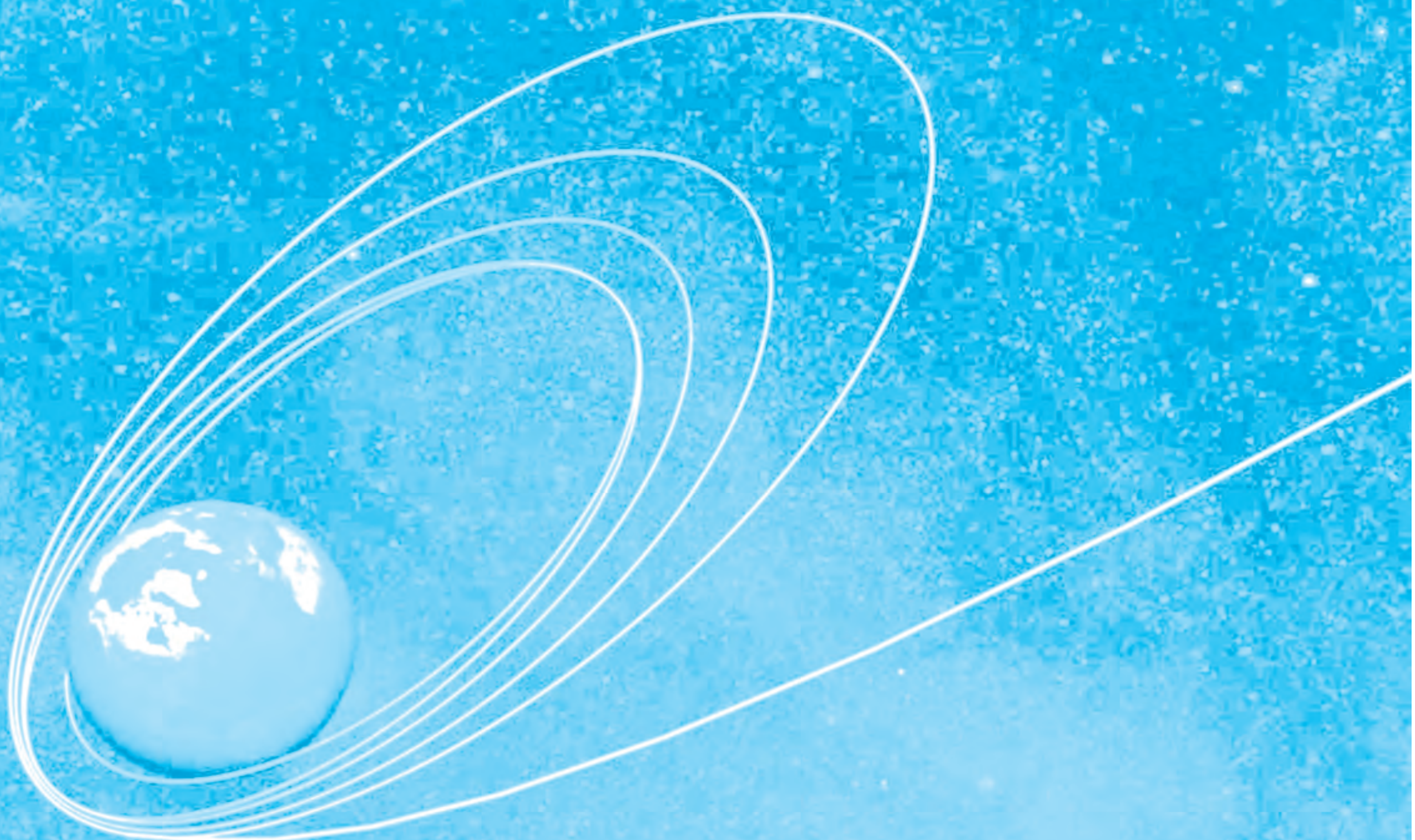
12. 设 m 为实数，直线 $y=m(x-1)$ 和圆 C：$x^2+y^2-y=0$ 相交于 P，Q 两点，若 $PQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 m 的值.

13. 若圆 C 的圆心在直线 $3x+2y=0$ 上，且圆 C 与 x 轴的交点分别为$(-2, 0)$，$(6, 0)$，求圆 C 的方程.

14. 已知直线 l_1：$2x-y-3=0$，l_2：$x-2y+3=0$，若圆 C 的圆心在 x 轴上，且与直线 l_1，l_2都相切，求圆 C 的方程.

15. 设 a 为实数，若直线 l 与圆 C：$x^2+y^2+2x-4y+a=0$ 相交于 A，B 两点，弦 AB 的中点为 $M(0, 1)$，求 a 的取值范围及直线 l 的方程.

第 3 章　圆锥曲线与方程

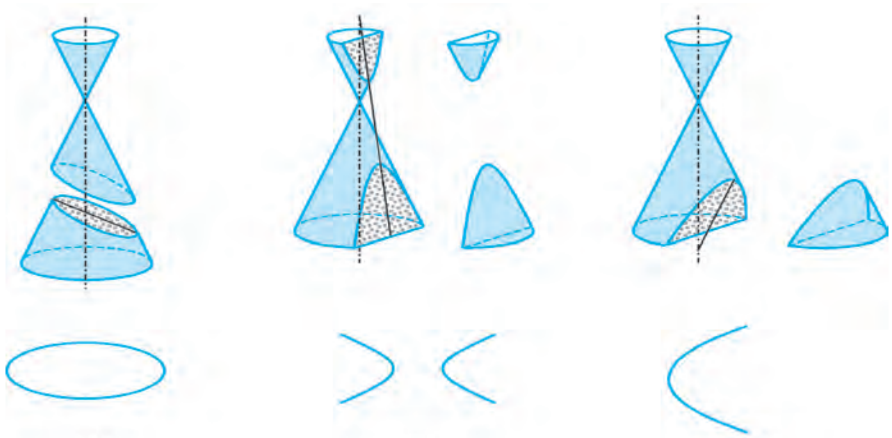


- 圆锥曲线与方程
  - 椭圆
    - 椭圆的标准方程
    - 椭圆的几何性质
  - 双曲线
    - 双曲线的标准方程
    - 双曲线的几何性质
  - 抛物线
    - 抛物线的标准方程
    - 抛物线的几何性质

解析几何彻底改变了数学的研究方法.

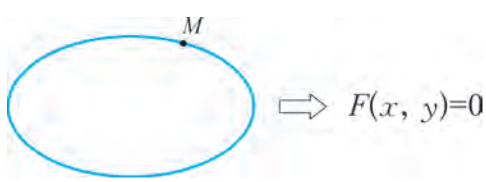
——M. 克莱因

在必修课程的“数学建模与数学探究”中,我们知道,用一个垂直于圆锥的轴的平面截圆锥,截面与圆锥面的交线是一个圆. 改变平面与圆锥轴的夹角,会得到不同的截面,截面与圆锥面的交线可以是椭圆、双曲线、抛物线,因此,我们通常把椭圆、双曲线和抛物线称为圆锥曲线.



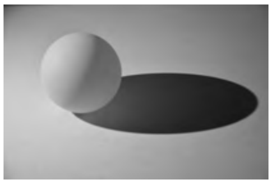
(1)　　(2)　　(3)

对于某一圆锥曲线,例如椭圆,也可以看成满足某种条件的点的集合. 在平面直角坐标系中,当点用坐标(x, y)表示后,椭圆便可用一个方程 $F(x, y)=0$ 表示,进而通过对方程的研究来研究椭圆.



- 怎样建立圆锥曲线的方程?
- 如何通过方程来研究圆锥曲线的性质?

3.1 椭 圆



太阳系中行星的运动轨迹是椭圆.用点光源照射一个放在地面上的球,适当调整点光源的位置,球在地面上影子的外轮廓线可以是椭圆.

在画板上取两个定点 F_1 和 F_2,把一条长度为定值且大于 F_1F_2 的细绳的两端固定在 F_1, F_2 两点(图 3 - 1 - 1),用笔尖把细绳拉紧,并使笔尖在画板上移动一周,画出的图形是一个椭圆.

图 3 - 1 - 1

平面内到两个定点 F_1,F_2 的距离之和等于常数(大于 F_1F_2)的点的轨迹叫作**椭圆**(ellipse),两个定点 F_1,F_2 叫作椭圆的**焦点**(focus),两个焦点间的距离叫作椭圆的**焦距**(focal distance).

类似于直线和圆,对于椭圆的研究,我们自然关注下面的问题:

- 怎样建立椭圆的方程?
- 如何根据椭圆的方程研究椭圆的性质?

3.1.1 椭圆的标准方程

设椭圆 C 的两个焦点分别为 F_1, F_2,它们之间的距离为 $2c$,椭圆上任意一点到 F_1, F_2 的距离之和为 $2a(2a>2c)$.

- 怎样求椭圆 C 的方程?

以 F_1, F_2 所在的直线为 x 轴,线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴,建立直角坐标系 xOy(图 3 - 1 - 2),则 F_1, F_2 的坐标分别为 $(-c, 0)$, $(c, 0)$.

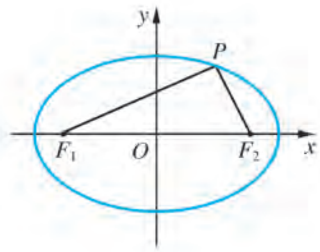


图 3-1-2

设 $P(x, y)$为椭圆上任意一点，根据椭圆的定义知

$$PF_1 + PF_2 = 2a,$$

即

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

将这个方程移项后两边平方，得

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

整理得

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

两边再平方，得

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2,$$

整理得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

因为 $a^2-c^2>0$，所以可设 $a^2-c^2=b^2(b>0)$，于是得

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

两边同除以 a^2b^2，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

由上述过程可知，椭圆上的点的坐标(x, y)都满足上面这个方程. 可以证明以上面这个方程的解为坐标的点(x, y)都在已知的椭圆上.

这样，焦点为$F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$的椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

类似地，在图 3-1-3 所示的直角坐标系中，我们可以得到焦点为$F_1(0, -c)$，$F_2(0, c)$的椭圆的方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

以上两种方程都叫作**椭圆的标准方程**(standard equation of ellipse)，其中 $b^2=a^2-c^2$.

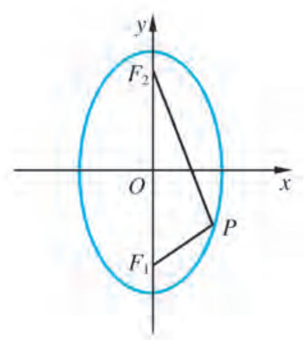


图 3-1-3

思　考

怎样推导焦点在 y 轴上的椭圆的标准方程?

例 1　已知椭圆的两个焦点分别是 $F_1(-3,\ 0)$，$F_2(3,\ 0)$，椭圆上一点 P 到两个焦点的距离之和为 10，求椭圆的标准方程.

解　因为椭圆的焦点在 x 轴上，所以设椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

由已知得 $2a=10$，即 $a=5$.

又因为椭圆的两个焦点为 $F_1(-3,\ 0)$，$F_2(3,\ 0)$，所以 $c=3$，从而

$$b^2=a^2-c^2=5^2-3^2=16.$$

因此，所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

例 2　已知椭圆的两个焦点坐标分别是 $(-2\sqrt{2},\ 0)$，$(2\sqrt{2},\ 0)$，且该椭圆经过点 $(2\sqrt{2},\ -2)$，求椭圆的标准方程.

解法 1　因为椭圆的焦点在 x 轴上，所以设椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

因为椭圆的两个焦点坐标分别是 $(-2\sqrt{2},\ 0)$，$(2\sqrt{2},\ 0)$，且点 $(2\sqrt{2},\ -2)$ 在椭圆上，所以由椭圆的定义知

$$\begin{aligned}2a&=\sqrt{(2\sqrt{2}+2\sqrt{2})^2+(-2-0)^2}+\sqrt{(2\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2+(-2-0)^2}\\&=8,\end{aligned}$$

所以 $a=4$.

又因为 $c=2\sqrt{2}$,所以 $b^2=a^2-c^2=16-8=8$.

因此,所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1.$$

解法 2 因为椭圆的焦点在 x 轴上,所以设椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

因为椭圆的两个焦点坐标分别是 $(-2\sqrt{2},\ 0)$, $(2\sqrt{2},\ 0)$,所以 $c=2\sqrt{2}$,

从而

$$a^2-b^2=c^2=8. \quad ①$$

又因为点 $(2\sqrt{2},\ -2)$ 在椭圆上,

所以

$$\frac{8}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1. \quad ②$$

由①②解得 $a^2=16$, $b^2=8$.

因此,所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1.$$

例 3 将圆 $x^2+y^2=4$ 上各点的横坐标保持不变,纵坐标变为原来的一半,求所得曲线的方程,并说明它是什么曲线.

解 设所得曲线上任一点的坐标为 $(x,\ y)$,圆 $x^2+y^2=4$ 上的对应点的坐标为 $(x',\ y')$.

由题意可得

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=2y. \end{cases}$$

因为

$$x'^2+y'^2=4,$$

所以

$$x^2+4y^2=4,$$

即

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

这就是所得曲线的方程,该曲线是一个椭圆.

例 4 求直线 $\sqrt{3}x-2y-2=0$ 和椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的公共点的坐标.

解 直线 $\sqrt{3}x-2y-2=0$ 和椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的公共点的坐标就是方程组

$$\begin{cases}\sqrt{3}x-2y-2=0,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$$

的解.

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=-1,\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=\sqrt{3},\\ y_2=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

因此，所求公共点的坐标为 $(0,\ -1)$，$\left(\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\right)$.

练　习

1. 在 $\triangle ABC$ 中，若 BC 的长为 6，周长为 16，则顶点 A 在怎样的曲线上运动？
2. 下列方程中哪些是椭圆的方程？若是，指出焦点在哪条坐标轴上.

   (1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；　　(2) $x^2+\frac{y^2}{2}=1$；

   (3) $2x^2+2y^2=1$；　　(4) $2x^2+3y^2=6$.
3. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

   (1) $a=4$，$b=3$，焦点在 x 轴上；

   (2) $b=1$，$c=\sqrt{15}$，焦点在 y 轴上；

   (3) $a=10$，$c=6$.
4. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

   (1) 焦点为 $F_1(-3,\ 0)$，$F_2(3,\ 0)$，且经过点 $P(0,\ 2)$；

   (2) 焦点为 $F_1(-2,\ 0)$，$F_2(2,\ 0)$，且经过点 $P\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$；

   (3) 经过点 $P(-4,\ 0)$，$Q(2,\sqrt{3})$.
5. 求下列椭圆的焦点坐标：

   (1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$；　　(2) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1$；

   (3) $16x^2+7y^2=112$；　　(4) $x^2+2y^2=1$.
6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 到左焦点的距离为 7，求点 P 到右焦点的距离.
7. 判断直线 $x+2y-2\sqrt{2}=0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的公共点的个数.

习题 3.1(1)

感受·理解

1. 在$\triangle ABC$中，$B(-3,0)$，$C(3,0)$，且$AB+AC=2BC$.

(1) 求证：点A在一个椭圆上运动；

(2) 写出这个椭圆的焦点坐标.

2. 求下列椭圆的焦点坐标：

(1) $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$；　　(2) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{12}=1$；

(3) $x^2+2y^2=4$；　　(4) $16x^2+9y^2=144$.

3. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) $a=\sqrt{6}$，$b=1$，焦点在x轴上；

(2) 焦点为$F_1(0,-3)$，$F_2(0,3)$，且$a=5$；

(3) 一个焦点为$F(2\sqrt{3},0)$，$a=2c$；

(4) 焦点在x轴上，焦距是4，且经过点$M(3,-2\sqrt{6})$.

4. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) 与椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$有相同的焦点，且经过点$\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$；

(2) 经过$A\left(2,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$B\left(-\sqrt{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$两点.

5. 已知一个贮油罐横截面的外轮廓线是一个椭圆，它的焦距为2.4 m，外轮廓线上的点到两个焦点距离的和为3 m，求这个椭圆的标准方程.

6. 若F_1，F_2是椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$的两个焦点，过$F_1$作直线与椭圆交于$A$，$B$两点，试求$\triangle ABF_2$的周长.

7. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$，直线$x-y+1=0$与该椭圆交于$A$，$B$两点，求线段$AB$中点的坐标和线段$AB$的长.

8. 设m为实数，若方程$\dfrac{x^2}{m-1}+\dfrac{y^2}{2-m}=1$表示焦点在$y$轴上的椭圆，求$m$的取值范围.

9. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$上一点$P$的横坐标是2，求：

(1) 点P到椭圆左焦点的距离PF_1；

(2) 点P到椭圆右焦点的距离PF_2.

思考·运用

10. 已知圆F_1：$(x+1)^2+y^2=1$，圆F_2：$(x-1)^2+y^2=9$. 若动圆C与圆F_1外切，且与圆F_2内切，求动圆的圆心C的轨迹方程.

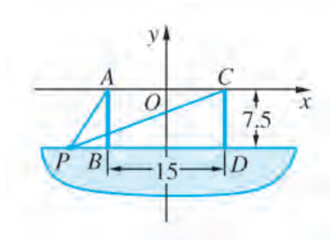
11. 已知动点P到点$F(1,0)$的距离是到直线$x=9$的距离的$\dfrac{1}{3}$，试判断点P的轨迹是什么图形.

12. 将椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$上各点的纵坐标不变，横坐标变为原来的2倍，求所

得曲线的方程，并说明它是什么曲线.

13. 已知点 A，B 的坐标分别为$(-2, 0)$，$(2, 0)$，直线 AM，BM 相交于点 M，且它们的斜率之积是$-\dfrac{3}{4}$，求点 M 的轨迹方程.

14. 船上两根高 7.5 m 的桅杆相距 15 m，一条 30 m 长的绳子两端系在桅杆的顶上，并按如图所示的方式绷紧. 假设绳子位于两根桅杆所在的平面内，求绳子与甲板接触点 P 到桅杆 AB 的距离(精确到 0.01 m).

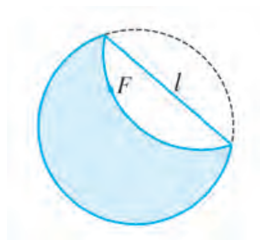


（第 14 题）

探究·拓展

15. 已知 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，$c=\sqrt{a^2-b^2}$. 记 $P(x_0, y_0)$，$F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$，求证：$PF_1+PF_2=2a$.

16. (操作题)准备一张圆形纸片，在圆内任取不同于圆心的一点 F，将纸片折起，使圆周过点 F(如图)，然后将纸片展开，就得到一条折痕 l(为了看清楚，可把直线 l 画出来). 这样继续折下去，得到若干折痕. 观察这些折痕围成的轮廓，它是什么曲线?



（第 16 题）

3.1.2 椭圆的几何性质

在建立了椭圆的标准方程之后，就可以利用方程来研究椭圆的几何性质. 那么，

利用方程研究曲线的几何性质是解析几何的基本思想.

● 如何利用椭圆的方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 来研究椭圆的性质?

1. 范围

由方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 可知，椭圆上任意一点的坐标(x, y)都满足

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,$$

即 $x^2\leqslant a^2$，所以 $$-a\leqslant x\leqslant a.$$

同理可得 $$-b\leqslant y\leqslant b.$$

这说明椭圆位于直线 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$ 所围成的矩形内（图 3-1-4）.

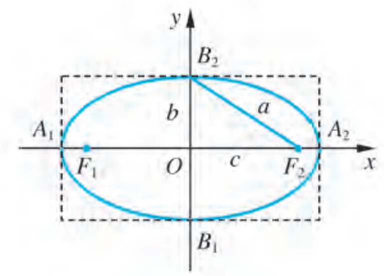


图 3-1-4

2. 对称性

在椭圆的标准方程中，把 x 换成 $-x$，方程并不改变，这说明当点 $P(x,\ y)$ 在椭圆上时，它关于 y 轴的对称点 $P'(-x,\ y)$ 也在椭圆上，所以椭圆关于 y 轴对称.

同理，把 y 换成 $-y$，或同时把 x，y 分别换成 $-x$，$-y$，方程都不变，所以椭圆关于 x 轴和原点都是对称的. 因此，坐标轴是椭圆的对称轴，原点是椭圆的对称中心. 椭圆的对称中心叫作**椭圆的中心**.

3. 顶点

在椭圆的标准方程中，令 $x=0$，得 $y=\pm b$，这说明点 $B_1(0,\ -b)$，$B_2(0,\ b)$ 是椭圆与 y 轴的两个交点. 同理，点 $A_1(-a,\ 0)$，$A_2(a,\ 0)$ 是椭圆与 x 轴的两个交点. 这四个点是对称轴与椭圆的交点，称为**椭圆的顶点**.

线段 A_1A_2，B_1B_2 分别叫作椭圆的**长轴**和**短轴**，它们的长分别等于 $2a$ 和 $2b$，a 和 b 分别叫作椭圆的**长半轴长**和**短半轴长**.

思　考

已知椭圆的长轴 A_1A_2 和短轴 B_1B_2，怎样确定椭圆焦点的位置？

4. 离心率

圆的形状都是相同的，而椭圆却有些比较“扁”，有些比较“圆”. 用什么样的量来刻画椭圆的“扁”的程度呢？

探　究

（1）将细绳的两端点固定在焦点处，用铅笔笔尖拉紧绳子，在平面上画一个椭圆，然后调整绳子的长度（分别加长、缩短），观察椭圆的“扁”的程度的变化规律；

（2）细绳的长度固定不变，将焦距分别增大和缩小，观察椭圆的“扁”的程度的变化规律.

从上面的探索过程可以发现，当$\frac{c}{a}$越接近于 0 时，椭圆越接近于圆；当$\frac{c}{a}$越接近于 1 时，椭圆越扁. 也就是说，随着$\frac{c}{a}$的增大，椭圆越来越扁.

由 $a^2=b^2+c^2$，得$\frac{b}{a}=\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}$. 当$\frac{c}{a}$越接近于 0 时，$\frac{b}{a}$越接近于 1，此时椭圆越接近于圆；当$\frac{c}{a}$越接近于 1 时，$\frac{b}{a}$越接近于 0，此时椭圆越扁. 也就是说，随着$\frac{c}{a}$的增大，椭圆越来越扁.

焦距与长轴长的比$\frac{c}{a}$叫作椭圆的**离心率**（eccentricity），记为 e. 显然，$0<e<1$.

例 1 求椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的长轴长、短轴长、离心率、焦点坐标和顶点坐标，并用描点法画出这个椭圆.

分析 由椭圆的标准方程 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 可以知道 $a=5$，$b=3$，则椭圆位于四条直线 $x=\pm 5$，$y=\pm 3$ 所围成的矩形内. 又椭圆以两坐标轴为对称轴，所以只要画出在第一象限内的图形就可画出整个椭圆.

解 根据椭圆的方程 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，得

$$a=5,\ b=3,\ c=\sqrt{25-9}=4,$$

所以，椭圆的长轴长 $2a=10$，短轴长 $2b=6$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$，焦点为 $F_1(-4,\ 0)$，$F_2(4,\ 0)$，顶点为 $A_1(-5,\ 0)$，$A_2(5,\ 0)$，$B_1(0,\ -3)$，$B_2(0,\ 3)$.

将方程变形为 $y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$，根据 $y=\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$ 算出椭圆在第一象限内的几个点的坐标（如下表所示）：

x	0	1	2	3	4	5
y	3	2.94	2.75	2.4	1.8	0

在 GGB 的输入框中，输入“x^2/25＋y^2/9＝1”，即可作出椭圆.

先描点画出在第一象限内的图形，再利用椭圆的对称性画出整个椭圆(图 3－1－5).

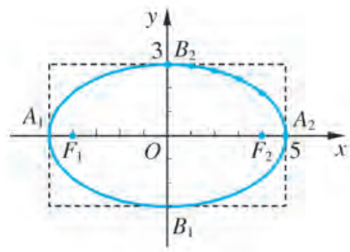


图 3－1－5

例 2 我国发射的第一颗人造地球卫星的运行轨道是以地球的中心(简称“地心”)F_2 为一个焦点的椭圆. 已知它的近地点 A(长轴端点中离地面最近的点)距地面439 km，远地点 B(长轴端点中离地面最远的点)距地面 2 384 km，AB 是椭圆的长轴，地球的半径约为 6 371 km，求卫星运行的轨道方程.

解 如图 3－1－6，以直线 AB 为 x 轴，线段 AB 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系 xOy，AB 与地球交于 C，D 两点. 设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

由题意知

$$AC=439,\ BD=2\,384,\ F_2C=F_2D=6\,371.$$

$$a-c=OA-OF_2=F_2A=439+6\,371=6\,810,$$

$$a+c=OB+OF_2=F_2B=2\,384+6\,371=8\,755.$$

太阳系中有的行星运动轨迹的离心率与 0 很接近，因此近似于圆. 如地球、火星、天王星运动轨迹的离心率分别为 0.017，0.093，0.046. 水星和冥王星相对稍扁一些，离心率分别为 0.206 和 0.249. 哈雷彗星的轨道非常扁，其离心率为0.967.

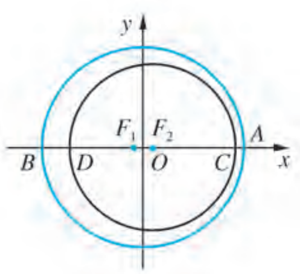


图 3－1－6

解得

$$a=7\,782.5,\ c=972.5,$$

从而

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{(a+c)(a-c)}\approx 7\,722.$$

因此，卫星运行轨道的方程是

$$\frac{x^2}{7\,783^2}+\frac{y^2}{7\,722^2}=1.$$

练　习

1. 求下列椭圆的长轴长、短轴长、离心率、顶点坐标和焦点坐标：

(1) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$；　　(2) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{100}=1$；

(3) $16x^2+25y^2=400$；　　(4) $4x^2+y^2=16$.

2. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) 中心在原点，焦点在 x 轴上，长轴长、短轴长分别为 8 和 6；

(2) 中心在原点，一个焦点坐标为(0, 5)，短轴长为 4；

(3) 对称轴都在坐标轴上，长半轴长为 10，离心率是 0.6；

(4) 中心在原点，焦点在 x 轴上，右焦点到短轴端点的距离为 2，到右顶点的距离为 1.

3. 下列各组椭圆中，哪一个更接近于圆？

(1) $4x^2+9y^2=36$ 与 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{20}=1$；

(2) $9x^2+4y^2=36$ 与 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

4. 已知椭圆的焦距为 4，离心率为 $\dfrac{2}{3}$，求椭圆的短轴长.

5. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点(3, −2)，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求 a, b 的值.

6. (1) 已知椭圆长轴的两个端点到左焦点的距离分别是 2 和 4，求椭圆的离心率；

(2) 设 F 是椭圆的一个焦点，B_1B_2 是短轴，若 $\angle B_1FB_2=60^\circ$，求椭圆的离心率.

习题 3.1(2)

感受·理解

1. 求下列椭圆的长轴长、短轴长、离心率、顶点坐标和焦点坐标：

(1) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$；　　(2) $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$；

(3) $4x^2+9y^2=36$.

2. 讨论下列椭圆的范围，并描点画出图形.

(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；　　(2) $4x^2+y^2=1$.

(第 3 题)

3. 如图，要把一个边长为 100 cm 和 64 cm 的矩形木板锯成椭圆形，使椭圆的长轴长和短轴长分别为 100 cm 与 64 cm，用简便的方法在木板上画出这个椭圆的草图.

4. 设 k 为实数，若椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{9-k}+\dfrac{y^2}{k-1}=1$，求满足下列条件的 k 的取值范围：

(1) 椭圆的焦点在 x 轴上；

(2) 椭圆的焦点在 y 轴上 .

5. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) 焦点在 x 轴上，长轴长为 4，焦距为 2；

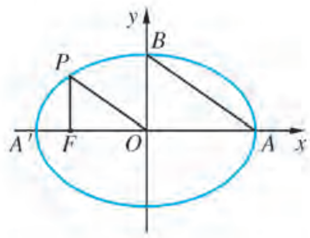
(2) 一个焦点坐标为(2, 0),短轴长为 2;

(3) 离心率为$\frac{\sqrt{5}}{3}$,短轴长为 4.

6. 已知椭圆短轴上的两个三等分点与两个焦点构成一个正方形,求椭圆的离心率.

7. 求以正方形 $ABCD$ 的两个顶点 A,B 为焦点,且过 C,D 两点的椭圆的离心率.

8. 地球运行的轨道是长半轴长为 1.50×10^{8} km、离心率为 0.02 的椭圆,太阳在此椭圆的一个焦点上,求地球到太阳的最远距离.



(第 9 题)

9. 如图,A, A', B 分别是椭圆的顶点,从椭圆上一点 P 向 x 轴作垂线,垂足为焦点 F,且 $AB \parallel OP$,$FA'=\sqrt{10}-\sqrt{5}$,求椭圆的方程.

10. 判断下列方程所表示的曲线是否关于 x 轴、y 轴或原点对称:

(1) $3x^2+8y^2=20$;　　(2) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$;

(3) $x^2+2y=0$;　　(4) $x^2+2xy+y=0$.

11. 已知点 M 到椭圆 $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ 的左焦点和右焦点的距离之比为 2∶3,求点 M 的轨迹方程.

思考・运用

12. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的两个焦点分别为 F_1,F_2,短轴的一个端点为 P.

(1) 若$\angle F_1PF_2$ 为直角,求椭圆的离心率;

(2) 若$\angle F_1PF_2$ 为钝角,求椭圆离心率的取值范围.

13. 已知圆柱的底面半径为 4,与圆柱底面成 30°角的平面截这个圆柱得到一个椭圆,建立适当的坐标系,求椭圆的标准方程和离心率.

14. 在推导椭圆的标准方程时,我们曾得到这样一个方程

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

将其变形为

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\frac{a^2}{c}-x}=\frac{c}{a},$$

你能解释这个方程的几何意义吗?

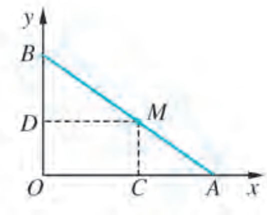
探究・拓展

15. (阅读题)猫的运动轨迹与达・芬奇椭圆仪——一架立在光滑地板上的梯子抵墙下滑,一只猫坐在梯子的正中间不动. 试求在梯子下滑过程中猫的运动轨迹. 在这一生动有趣的叙述后面,我们可见到下面的数学问题:

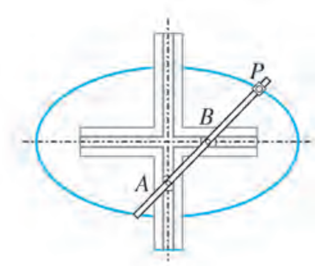
已知一个直角,一条长度为 d 的线段的两个端点分别在这个直角的两边上滑动,求线段中点的轨迹.

这个问题在习题 2.1 第 13 题中已经得到解决.

如果这只猫没有坐在梯子的正中间,那么在梯子下滑过程中,它沿怎样的一条路线运动? 下面我们用解析法求猫运动的轨迹.



(1)



(2)

（第 15 题）

以直角的两边所在的直线分别作为 x 轴和 y 轴，建立直角坐标系(图(1))，过点 M 作 $MC \perp AO$ 于点 C，$MD \perp BO$ 于点 D. 设 $BM=a$，$AM=b$，$M(x, y)$，$A(m, 0)$，$B(0, n)$. 根据 $\triangle BMD \backsim \triangle BAO$，得

$$\frac{x}{m}=\frac{a}{a+b},$$

即
$$m=\frac{(a+b)x}{a}.$$

同理
$$n=\frac{(a+b)y}{b}.$$

因为 $m^2+n^2=(a+b)^2$，将上面的 m，n 代入并化简，得

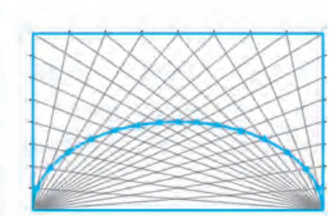
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

其中 x，y 均为正数. 因此，这只猫沿着一段椭圆弧运动.

上面的结果与用来作椭圆的“达·芬奇椭圆仪”(图(2))的工作原理非常相似. 制作椭圆仪的方法如下：用两根木条钉成十字架，木条中间挖一道槽. 在另一活动木条 PBA 的 P 处钻一小孔，可以容纳笔尖，A，B 是两个螺钉，可以放松移动以配合 $AP=a$，$BP=b$ 的长度. 当 A，B 各在一条槽内移动时，P 处笔尖就画出一个椭圆. 你能解释它的原理吗？尝试用 GGB 软件来模拟这一过程.

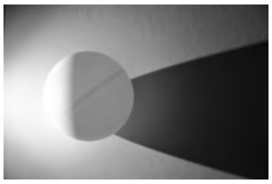
16. 椭圆可以视为对圆上的点向同一条直径施行伸缩变换而成. 运用椭圆与圆之间的这种关系，你能根据圆的面积公式来猜想椭圆的面积公式吗？

17. 把矩形的各边 n 等分，如图连接直线，判断对应直线的交点是否在一个椭圆上，为什么？



（第 17 题）

3.2 双曲线



发电厂冷却塔轴截面的外轮廓线的形状是双曲线. 用点光源照射一个放在地面上的球,适当调整点光源的位置,球在地面上影子的外轮廓线可以是双曲线的一部分.

取一条拉链,打开它的一部分,在拉开的两边上各选择一点,分别固定在画板上的 F_1, F_2 两点(图 3-2-1). 把笔尖放在点 P 处,随着拉链拉开或者闭拢,笔尖画出的曲线就是双曲线的一部分.

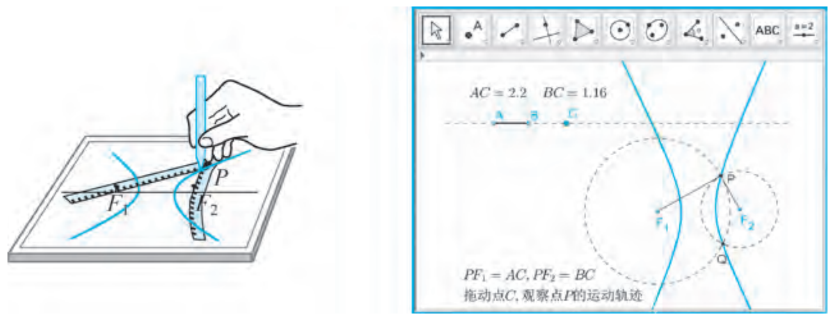


图 3-2-1

> 平面内到两个定点 F_1, F_2 的距离之差的绝对值等于常数(小于 F_1F_2 的正数)的点的轨迹叫作**双曲线**(hyperbola),两个定点 F_1, F_2 叫作双曲线的**焦点**,两个焦点间的距离叫作双曲线的**焦距**.

在椭圆的研究中,我们借助平面直角坐标系,得到了椭圆的方程,并利用方程研究了椭圆的性质. 现在我们将运用相同的方法来研究双曲线. 那么,

- 怎样建立双曲线的方程?
- 如何根据双曲线的方程研究双曲线的性质?

3.2.1 双曲线的标准方程

我们知道,椭圆上的点到两个定点的距离之和等于常数. 当焦点在 x 轴上时,椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

双曲线上的点到两个定点距离之差的绝对值等于常数，那么，

● 双曲线的标准方程是什么形式呢？

设双曲线的焦距为 $2c$，双曲线上任意一点到焦点 F_1，F_2 的距离之差的绝对值等于常数 $2a$ $(2c>2a)$.

以 F_1，F_2 所在的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系 xOy（图 3－2－2），则 F_1，F_2 的坐标分别为 $(-c, 0)$，$(c, 0)$.

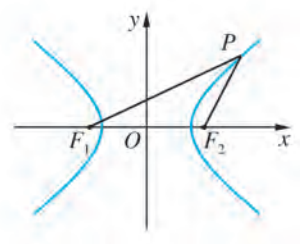


图 3－2－2

设 $P(x, y)$ 为双曲线上任意一点，根据双曲线的定义知

$$|PF_1-PF_2|=2a,$$

即

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a,$$

化简，得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

因为 $c^2-a^2>0$，所以可设 $c^2-a^2=b^2(b>0)$，得

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$$

两边同除以 a^2b^2，得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

由上述过程可知，双曲线上的点的坐标 (x, y) 都满足上面这个方程. 可以证明以上面这个方程的解为坐标的点 (x, y) 都在已知的双曲线上.

这样，焦点为 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$ 的双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).$$

类似地，焦点为 $F_1(0, -c)$，$F_2(0, c)$ 的双曲线的方程为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).$$

以上两种方程都叫作**双曲线的标准方程**（standard equation of a hyperbola)，其中 $b^2=c^2-a^2$.

思 考

怎样推导出焦点在 y 轴上的双曲线的标准方程?

例 1 已知双曲线的两个焦点分别为 $F_1(-5,0)$，$F_2(5,0)$，双曲线上一点 P 到 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于 8，求双曲线的标准方程.

解 由题意可设双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).$$

因为 $$2a=8,\ c=5,$$

所以 $$a=4,$$

$$b^2=c^2-a^2=5^2-4^2=9.$$

故所求双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

例 2 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) $a=3$，$b=4$，焦点在 x 轴上；

(2) $a=2\sqrt{5}$，经过点 $A(2,-5)$，焦点在 y 轴上.

解 (1) 依题意 $a=3$，$b=4$，且焦点在 x 轴上，所以双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

(2) 因为焦点在 y 轴上，所以可设双曲线的标准方程为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0).$$

由 $a=2\sqrt{5}$，且点 $A(2,-5)$ 在双曲线上，可得

$$\begin{cases} a=2\sqrt{5}, \\ \dfrac{25}{a^2}-\dfrac{4}{b^2}=1, \end{cases}$$

解得 $$b^2=16.$$

因此，所求双曲线的标准方程为

$$\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1.$$

例 3 已知 A,B 两地相距 800 m,一炮弹在某处爆炸,在 A 处听到爆炸声的时间比在 B 处迟 2 s,设声速为 340 m/s.

(1) 爆炸点在什么曲线上?

(2) 求这条曲线的方程.

解 (1) 设 M 为爆炸点,由题意得

$$MA - MB = 340 \times 2 = 680.$$

因为爆炸点离 A 点比离 B 点距离更远,所以爆炸点在以 A,B 为焦点且距 B 较近的双曲线的一支上(图 3-2-3).

(2) 如图 3-2-3,以直线 AB 为 x 轴,线段 AB 的垂直平分线为 y 轴,建立直角坐标系 xOy. 设 $M(x, y)$为曲线上任一点.

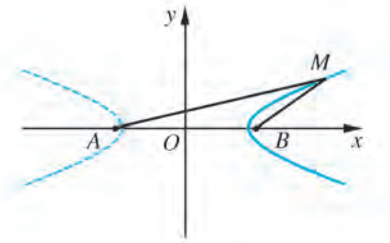


图 3-2-3

由 $MA - MB = 680$,得 $2a = 680$,即 $a = 340$.

由 $AB = 800$,得 $2c = 800$,即 $c = 400$,

所以 $$b^2 = c^2 - a^2 = 44\,400.$$

因为 $$MA - MB = 680 > 0,$$

所以 $$x > 0.$$

因此,所求曲线的方程为

$$\frac{x^2}{115\,600} - \frac{y^2}{44\,400} = 1 \ (x > 0).$$

思 考

确定爆炸点或出事地点的位置,在军事上或抢险救灾时都有重要意义. 从例 3 看出,利用两个不同的观测点,可以确定爆炸点所在的曲线,但不能完全确定爆炸点的位置. 要有几个观测点才能确定爆炸点的位置呢?

例 4 已知双曲线 C: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$, 直线 l: $x-2y+2=0$,求直线 l 与双曲线 C 的公共点的坐标.

解 直线 l: $x - 2y + 2 = 0$ 与双曲线 C: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的公共点的坐标就是方程组

$$\begin{cases} x-2y+2=0, \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$$

的解.

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x_1=-2, \\ y_1=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=4, \\ y_2=3. \end{cases}$$

因此，所求公共点的坐标为 $(-2, 0)$，$(4, 3)$.

练　习

1. 在$\triangle ABC$中，BC的长为 2，$|AB-AC|=1$，试确定点 A 在怎样的曲线上运动.

2. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) $c=5$，$b=3$，焦点在 x 轴上；

(2) 焦点为 $F_1(0, -6)$，$F_2(0, 6)$，且 $a=3$；

(3) $a=4$，$b=3$.

3. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 一个焦点为 $F(-3, 0)$，且经过点$(2, 0)$；

(2) 与双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 有相同的焦点，且经过点$(3\sqrt{2}, 2)$；

(3) 经过 $M\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}, 1\right)$和 $N(4, -3)$ 两点.

4. 设 k 为实数，若双曲线 $8kx^2-ky^2=8$ 的一个焦点坐标为$(0, 3)$，则 k 的值为(　　).

A. 1　　B. -1　　C. $\dfrac{1}{3}\sqrt{65}$　　D. $-\dfrac{1}{3}\sqrt{65}$

5. 判断直线 $y=\sqrt{3}(x-1)$ 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 的公共点的个数.

6. 设 m 为实数，求双曲线 $\dfrac{x^2}{m^2+12}-\dfrac{y^2}{4-m^2}=1$ 的焦距.

习题 3.2(1)

感受 · 理解

1. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}$，焦点在 x 轴上；

(2) $b=4$，$c=5$，焦点在 y 轴上；

(3) $a=b$，一个焦点为 $F(0, 2\sqrt{2})$；

(4) $a=\dfrac{1}{2}$，$c=1$.

2. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 经过点$(\sqrt{6},0)$，$(3,2)$；

(2) 焦点为$(0, -5)$,$(0, 5)$,经过点$\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, 2\sqrt{3}\right)$;

(3) $a=b$,经过点$(3, -1)$;

(4) 经过$(3, -4\sqrt{2})$和$\left(\frac{9}{4}, 5\right)$两点.

3. 已知双曲线 $4x^2-y^2+64=0$ 上一点 M 到它的一个焦点的距离等于 1,求点 M 到另一个焦点的距离.

4. 证明:椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 与双曲线 $x^2-15y^2=15$ 的焦点相同.

5. 在$\triangle ABC$ 中,$B(-6, 0)$,$C(6, 0)$,直线 AB, AC 的斜率乘积为$\frac{9}{4}$,求顶点 A 的轨迹.

6. 已知双曲线过点$(3, -2)$,且与椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 有相同的焦点,求双曲线的方程.

7. 已知双曲线 C:$\frac{x^2}{3}-y^2=1$,直线 l:$x-\sqrt{3}y-1=0$,求直线 l 与双曲线 C 的公共点的坐标.

思考·运用

8. 设 k 为实数,若方程$\frac{x^2}{2-k}+\frac{y^2}{k-1}=1$表示双曲线,求 k 的取值范围,并写出焦点坐标.

9. 设 a 为实数,若椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 与双曲线$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{2}=1$有相同的焦点,求 a 的值.

10. 已知双曲线$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$的焦点为 F_1, F_2,点 P 在双曲线上,且 $PF_1\perp PF_2$,求 $\triangle F_1PF_2$ 的面积.

11. 已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2,过 F_1 作斜率为 $2\sqrt{6}$ 的弦AB. 求:

(1) AB 的长;

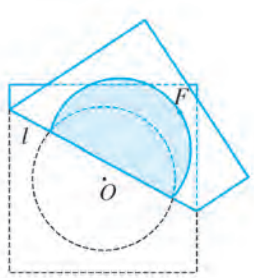
(2) $\triangle F_2AB$ 的周长.

探究·拓展

12. 已知定圆 O_1 和 O_2的半径分别为 1 和 2,$O_1O_2=4$,动圆 M 与圆 O_1 内切,且与圆 O_2外切. 试建立适当的坐标系,写出动圆圆心 M 的轨迹方程,并说明轨迹是何种曲线.

13. 已知 $\frac{x_0^{\,2}}{a^2}-\frac{y_0^{\,2}}{b^2}=1\ (a>0, b>0)$,$c=\sqrt{a^2+b^2}$. 记 $P(x_0, y_0)$,$F_1(-c, 0)$,$F_2(c, 0)$. 求证:$|PF_1-PF_2|=2a$.

14. (操作题)在纸上画一个圆 O,在圆外任取一定点 F,将纸片折起,使圆周通过 F,然后展开纸片,得到一条折痕 l(为了看清楚,可把直线 l 画出来). 这样继续下去,得到若干折痕. 观察这些折痕围成的轮廓,它是什么曲线?



(第 14 题)

3.2.2 双曲线的几何性质

在建立了双曲线的标准方程之后，可以通过方程来研究双曲线的几何性质．那么，

● 如何利用双曲线的方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 来研究它的性质？

1. 范围

由方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 可知，双曲线上任意一点的坐标 $(x,\ y)$ 都满足

$$\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1,$$

所以

$$\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1,$$

即

$$x\geqslant a \text{ 或 } x\leqslant -a.$$

这说明双曲线位于不等式 $x\geqslant a$ 与 $x\leqslant -a$ 所表示的平面区域内（图 3－2－4）.

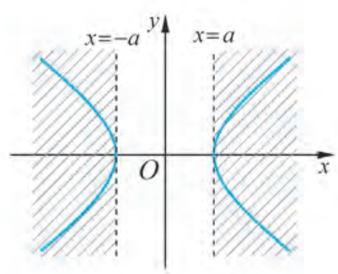


图 3－2－4

思 考

根据双曲线的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，你能发现双曲线的范围还受到怎样的限制？

由双曲线的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 可知

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}>0,$$

即

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)>0,$$

从而 $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}>0,\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}>0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}<0,\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}<0.\end{cases}$

所以双曲线还应在上面两个不等式组表示的平面区域内，也就是以直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 和 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 为边界的平面区域内(图 3－2－5).

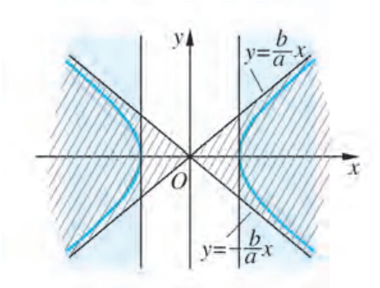


图 3－2－5

2. 对称性

在双曲线的标准方程中，分别把 x 换成 $-x$，或把 y 换成 $-y$，或同时把 x，y 分别换成 $-x$，$-y$，方程都不变. 所以双曲线分别关于 y 轴、x 轴和原点都是对称的. 这时，坐标轴是双曲线的对称轴，原点是双曲线的对称中心. 双曲线的对称中心叫作双曲线的**中心**.

3. 顶点

在双曲线的标准方程中，令 $y=0$，得 $x=\pm a$. 这说明 $A_1(-a, 0)$，$A_2(a, 0)$是双曲线与 x 轴的两个交点，且 A_1 是左支上最右边的点，A_2 是右支上最左边的点. 我们把这两个点称为双曲线的**顶点**.

令 $x=0$，得 $y^2=-b^2$，这个方程没有实数根，说明双曲线与 y 轴没有交点，但为了便于画图，我们把 $B_1(0, -b)$，$B_2(0, b)$ 也画在 y 轴上.

线段 A_1A_2 叫作双曲线的**实轴**，它的长等于 $2a$，a 叫作双曲线的**实半轴长**；线段 B_1B_2 叫作双曲线的**虚轴**，它的长等于 $2b$，b 叫作双曲线的**虚半轴长**.

4. 渐近线

我们已经知道，双曲线的范围在以直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 和 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 为边界的平面区域内(图 3－2－5)，那么，从 x，y 的变化趋势看，双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与直线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 具有怎样的关系？

根据对称性，可以先研究双曲线在第一象限内的部分与直线 $y=$

$\dfrac{b}{a}x$ 的关系.

如图 3-2-6,设 $M(x, y)$为双曲线在第一象限内的点,过点 M 作 $MN \perp x$ 轴,垂足为 $N(x, 0)$. 直线 MN 交直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 于点 P. 当点 N 向右移动时,观察 PM 长度的变化情况.

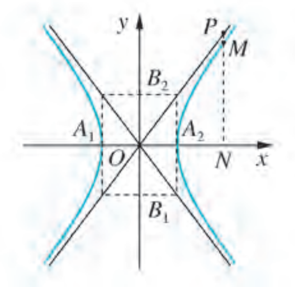


图 3-2-6

我们发现,随着 x 的增大,PM 长度越来越接近于 0. 事实上,对于相同的横坐标 x,直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 上对应的点 P 的纵坐标为$\dfrac{b}{a}x$,所以 PM 的长为

$$PM=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

当 x 趋向于正无穷大时,$x+\sqrt{x^2-a^2}$ 也趋向于正无穷大,$\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$趋向于0, 即 PM 的长趋向于0. 这说明,随着 x 的增大,双曲线在第一象限内的点在直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 的下方且无限接近于这条直线.

同理,在第三象限内,双曲线上的点在直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 的上方且无限接近于这条直线.

能用其他方法说明这个结论吗?

根据对称性,直线 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 也有相同的性质.

我们把两条直线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 叫作双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的**渐近线**(asymptote).

利用直线 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$ 所围成的矩形,先画出双曲线的两条渐近线,就可以画出双曲线的简图(图 3-2-6).

在双曲线的标准方程 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中,如果 $a=b$, 那么方程可化为

$$x^2-y^2=a^2,$$

此时，双曲线的实轴长和虚轴长都等于 $2a$，且两条渐近线互相垂直. 实轴和虚轴等长的双曲线叫作**等轴双曲线**.

5. 离心率

椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}$ 反映了图形的“扁”的程度，那么在双曲线中，$\frac{c}{a}$ 是否也与双曲线的形状有关？

从图 3 - 2 - 6 中可以看出，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 夹在两条渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 之间，这说明 $\frac{b}{a}$ 的大小决定了双曲线的开口的大小. $\frac{b}{a}$ 越大，双曲线的开口就越大；$\frac{b}{a}$ 越小，双曲线的开口就越小.

由

$$\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

可知，$\frac{c}{a}$ 越大，双曲线的开口就越大；$\frac{c}{a}$ 越小，双曲线的开口也就越小. 因此 $\frac{c}{a}$ 反映了双曲线开口的大小.

焦距与实轴长的比 $\frac{c}{a}$ 叫作双曲线的**离心率**，记为 e. 显然，双曲线的离心率 $e>1$.

例 1 求双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 的实轴长、虚轴长、焦点坐标、顶点坐标、离心率及渐近线方程.

解 由题意知 $a^2=4$，$b^2=3$，所以

$$c^2=a^2+b^2=4+3=7,$$

解得

$$a=2,\ b=\sqrt{3},\ c=\sqrt{7}.$$

因此，双曲线的实轴长 $2a=4$，虚轴长 $2b=2\sqrt{3}$.

焦点坐标为 $(-\sqrt{7},\ 0)$，$(\sqrt{7},\ 0)$，顶点坐标为 $(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$.

离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

例 2 已知双曲线的中心在原点，焦点在 y 轴上，焦距为 16，离心率为$\frac{4}{3}$，求双曲线的方程.

解 根据题意知 $2c=16,\ \frac{c}{a}=\frac{4}{3}$，

解得 $a=6,\ c=8$，

从而 $b^2=c^2-a^2=8^2-6^2=28.$

因为双曲线的中心在原点，焦点在 y 轴上，所以所求双曲线方程为

$$\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{28}=1.$$

练　习

1. 求双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ 的实轴长、虚轴长、焦点坐标、顶点坐标、离心率及渐近线方程.
2. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：
   (1) 焦点在 x 轴上，$a=4$，离心率为$\frac{3}{2}$；
   (2) 焦点的坐标为$(5,0)$，$(-5,0)$，渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$；
   (3) 虚轴长为 12，离心率为$\frac{5}{4}$；
   (4) 离心率 $e=\sqrt{2}$，且经过点 $P(4,-\sqrt{10})$.
3. 若双曲线经过点$(-\sqrt{3},6)$，且它的两条渐近线方程是 $y=\pm 3x$，则双曲线的方程是(　　).
   A. $\frac{y^2}{9}-x^2=1$　　B. $\frac{x^2}{9}-y^2=1$
   C. $\frac{y^2}{27}-\frac{x^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{3}=1$
4. 已知等轴双曲线的中心在原点，它的一个焦点为 $F(0,2\sqrt{2})$，求双曲线的方程.
5. 设 k 为实数，已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$ 的离心率 $e\in(1,2)$，求 k 的取值范围.

习题 3.2(2)

感受・理解

1. 求下列双曲线的实轴长、虚轴长、顶点坐标、焦点坐标、离心率及渐近线方程：
   (1) $x^2-8y^2=32$；　(2) $9x^2-y^2=81$；
   (3) $x^2-y^2=-4$；　(4) $\frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{25}=1$.

2. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 顶点在 x 轴上，焦距为 10，离心率是 $\frac{5}{4}$；

(2) 一个顶点的坐标为(0,2)，一个焦点的坐标为 $(0, -\sqrt{5})$；

(3) 焦点在 y 轴上，一条渐近线方程为 $y=\frac{3}{4}x$，实轴长为 12；

(4) 渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x$，焦点坐标为 $(-5\sqrt{2}, 0)$ 和 $(5\sqrt{2}, 0)$.

3. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 实轴长为 6，渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{2}x$；

(2) 焦距为 20，渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$.

4. 已知双曲线的对称轴为坐标轴，两个顶点间的距离为 2，焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{2}$，求双曲线的标准方程.

5. 已知离心率为 $\frac{5}{3}$ 的双曲线与椭圆 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$ 的焦点相同，求双曲线的方程.

6. 求以椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$ 的焦点为顶点，且以椭圆的顶点为焦点的双曲线的方程.

7. 求经过点 $A(3, -1)$，且对称轴是坐标轴的等轴双曲线的方程.

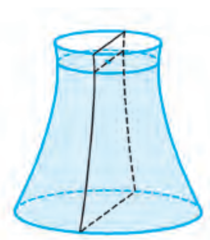
8. 设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，过点 $(a, 0)$，$(0, b)$ 的直线的倾斜角为 150°，求双曲线的离心率.

思考·运用

9. 求与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 有公共的渐近线，且经过点 $A(-3, 2\sqrt{3})$ 的双曲线的方程.

10. 已知双曲线的两条渐近线的夹角为 60°，求双曲线的离心率.

11. 一种冷却塔的外形是双曲线的一部分绕其虚轴旋转所成的曲面(如图). 现要求制造一个最小半径为 8 m，下口半径为 15 m，下口到最小半径圆面的距离为 24 m，高为 27 m 的双曲线冷却塔，试计算上口的半径(精确到 0.01 m).



(第 11 题)

12. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的半焦距为 c，直线 l 过 $(a, 0)$，$(0, b)$ 两点，原点到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{4}c$，求双曲线的离心率.

探究·拓展

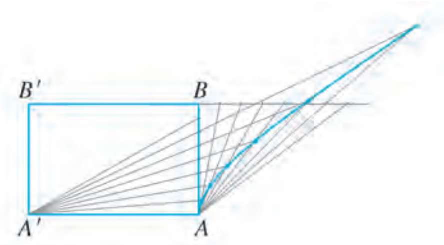
13. 动点 $M(x,y)$ 与定点 $F(c,0)$ 的距离和它到定直线 l：$x=\frac{a^2}{c}$ 的距离之比是常数 $\frac{c}{a}(c>a>0)$，求动点 M 的轨迹.

14. 以已知双曲线的虚轴为实轴、实轴为虚轴的双曲线叫作原双曲线的**共轭双曲线**. 求证：

(1) 双曲线与它的共轭双曲线有共同的渐近线；

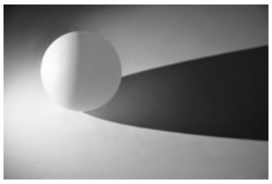
(2) 双曲线与它的共轭双曲线的焦点在同一个圆上.

15. 如图，在矩形 $ABB'A'$ 中，把边 AB 分成 n 等份. 在边 $B'B$ 的延长线上，以 BB' 的 n 分之一为单位长度连续取点. 过边 AB 上各分点和 A' 作直线，过 $B'B$ 延长线上的对应分点和点 A 作直线，这两条直线的交点为 P，P 在什么曲线上运动？



（第 15 题）

3.3 抛物线



探照灯的内壁是由抛物线的一段旋转而成的. 用点光源照射一个放在地面上的球,适当调整点光源的位置,球在地面上影子的外轮廓线可以是抛物线的一部分.

如图 3-3-1,在画板上画一条直线 l,把一个直角三角板的一边紧贴直线 l,把一条细绳的一端固定在三角板的顶点 A 处,取细绳长等于点 A 到直角顶点 H 的距离,并且把细绳的另一端固定在点 F 处. 用笔尖靠着直角三角板的边 AH,并扣紧细绳,然后上下移动三角板,笔尖画出的曲线是抛物线的一部分.

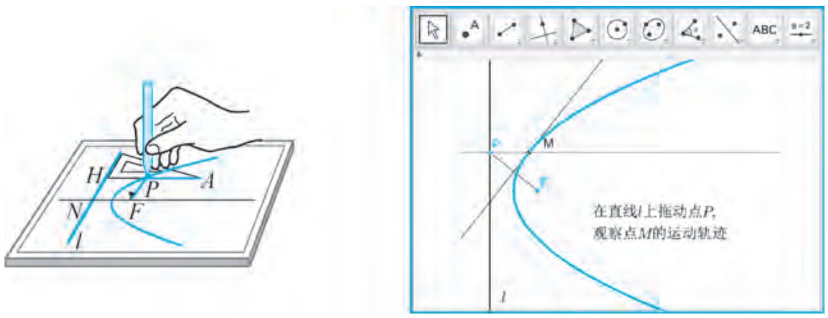


图 3-3-1

> 平面内到一个定点 F 和一条定直线 l(F 不在 l 上)的距离相等的点的轨迹叫作**抛物线**(parabola),定点 F 叫作抛物线的**焦点**,定直线 l 叫作抛物线的**准线**(directrix).

类似于椭圆和双曲线,我们继续借助平面直角坐标系,利用解析几何研究问题的一般方法来研究抛物线. 那么,

- 怎样建立抛物线的方程?
- 如何根据抛物线的方程研究抛物线的性质?

3.3.1 抛物线的标准方程

抛物线的焦点为 F,准线为 l,

- 怎样求抛物线的方程?

过 F 作直线 $FN \perp$ 直线 l,垂足为 N. 以直线 NF 为 x 轴,线段 NF

的垂直平分线为 y 轴，建立如图 3 - 3 - 2 所示的直角坐标系 xOy.

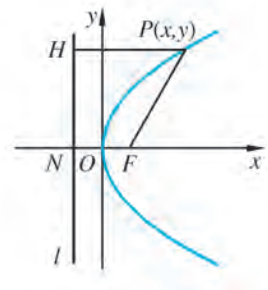


图 3 - 3 - 2

设焦点 F 到准线 l 的距离为 p，则 $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$. 又设 $P(x,\ y)$ 为抛物线上任意一点. 过点 P 作 $PH\perp l$，垂足为 H，则 $PF=PH$，得

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

将上式两边平方并化简，得

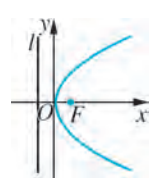
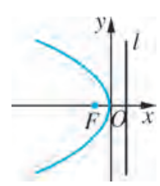
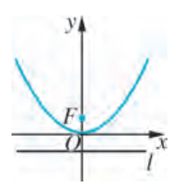
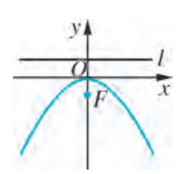
$$y^2=2px.$$

由上述过程可知，抛物线上的点的坐标 $(x,\ y)$ 都满足上面这个方程. 可以证明以上面这个方程的解为坐标的点 $(x,\ y)$ 都在已知的抛物线上.

这样，焦点为 $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ 的抛物线的方程为

$$y^2=2px\ (p>0).$$

类似地，我们可以建立如下表所示的坐标系，从而得到抛物线方程的另外三种形式 $y^2=-2px$，$x^2=2py$，$x^2=-2py\ (p>0)$. 这四种方程都叫作**抛物线的标准方程**(standard equation of parabola).

标准方程	$y^2=2px$	$y^2=-2px$	$x^2=2py$	$x^2=-2py$
图　形				
焦点坐标	$\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$	$\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$	$\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$	$\left(0,\ -\frac{p}{2}\right)$
准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
开口方向	向　右	向　左	向　上	向　下

例 1 已知抛物线的焦点为 $F(5, 0)$，求抛物线的标准方程和准线方程.

解 因为抛物线的焦点为 $F(5, 0)$，所以可设抛物线的标准方程为

$$y^2 = 2px\ (p > 0),$$

其中 $\frac{p}{2} = 5$，即 $p = 10$，$2p = 20$.

因此，所求抛物线的标准方程是

$$y^2 = 20x,$$

准线方程是 $x = -5$.

例 2 求经过点 $P(-2, -4)$ 的抛物线的标准方程.

解 如图 3-3-3，因为点 P 在第三象限，所以满足条件的抛物线的标准方程有两种情形

$$y^2 = -2p_1x\ (p_1 > 0) \text{ 和 } x^2 = -2p_2y\ (p_2 > 0).$$

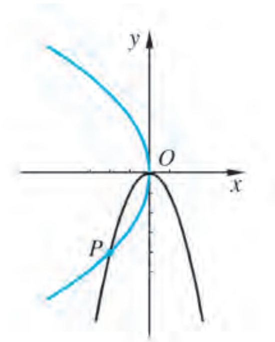


图 3-3-3

分别将点 P 的坐标代入方程可以解得

$$p_1 = 4,\ p_2 = \frac{1}{2}.$$

因此，满足条件的抛物线有两条，它们的标准方程分别为

$$y^2 = -8x,\ x^2 = -y.$$

例 3 已知探照灯的轴截面是抛物线 $y^2 = x$（图 3-3-4），平行于 x 轴的光线照射到抛物线上的点 $P(1, -1)$，反射光线经过抛物线的焦点后又照射到抛物线上的 Q 点. 试确定点 Q 的坐标.

解 因为抛物线 $y^2 = x$ 的焦点为 $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$，所以直线 PF 的方程为

$$y = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right).$$

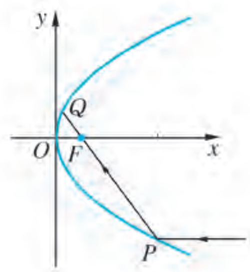


图 3-3-4

由于 $Q(x, y)$ 是抛物线与直线 PF 的公共点，解方程组

$$\begin{cases} y=-\dfrac{4}{3}\left(x-\dfrac{1}{4}\right), \\ y^2=x, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{16}, \\ y_1=\dfrac{1}{4} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=-1 \end{cases} (舍去).$$

故点 Q 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{4}\right)$.

练　习

1. 过点 $(1, -2)$ 的抛物线的标准方程是（　　）.

A. $y^2=4x$ 或 $x^2=\dfrac{1}{2}y$　　B. $y^2=4x$

C. $y^2=4x$ 或 $x^2=-\dfrac{1}{2}y$　　D. $x^2=-\dfrac{1}{2}y$

2. 求适合下列条件的抛物线的标准方程：

(1) 焦点为 $F(6, 0)$；　　(2) 焦点为 $F(0, -5)$；

(3) 准线方程为 $y=\dfrac{2}{3}$；　　(4) 焦点到准线的距离为 5.

3. 已知抛物线 C 的焦点是直线 $2x-3y+6=0$ 与坐标轴的一个交点，求抛物线 C 的标准方程.

4. 已知直线 l 过点 $(1, 2)$ 且与抛物线 $y^2=4x$ 只有一个公共点，求直线 l 的方程.

5. 已知点 P 在抛物线 $y^2=2x$ 上.

(1) 若点 P 的横坐标为 2，求点 P 到抛物线焦点的距离；

(2) 若点 P 到抛物线焦点的距离为 4，求点 P 的坐标.

6. 已知动点 $M(x, y)$ 到点 $F(4, 0)$ 的距离比到直线 $x+5=0$ 的距离小 1，试判断点 M 的轨迹是什么图形.

习题 3.3(1)

感受·理解

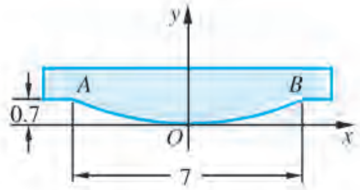
1. 求适合下列条件的抛物线的标准方程：

(1) 焦点为 $F(-2, 0)$；　　(2) 准线方程是 $y=\dfrac{1}{3}$；

（3）焦点到准线的距离为3；（4）经过点$(-2, 3)$.

2. 已知抛物线的顶点在原点，对称轴为坐标轴，焦点在直线$x-2y-4=0$上，求抛物线的方程.

3. 如图，吊车梁的鱼腹部分AOB是一段抛物线，宽7 m，高0.7 m，求这条抛物线的方程.



（第3题）

4. 已知抛物线的顶点、焦点分别是双曲线$16x^2-9y^2=144$的中心、左顶点，求抛物线的方程.

5. 已知圆F：$(x+3)^2+y^2=1$，直线l：$x=2$，求与直线l相切且与圆F外切的圆的圆心M的轨迹方程.

6. 已知直线$2x-y-4=0$与抛物线$y^2=4x$相交于A，B两点，求AB的长.

思考·运用

7. 从抛物线$y^2=16x$上任意一点向x轴作垂线段，求垂线段中点的轨迹方程，并说明它表示什么曲线.

8. 已知等边三角形的一个顶点位于原点，另外两个顶点在抛物线$y^2=6x$上，求这个等边三角形的边长.

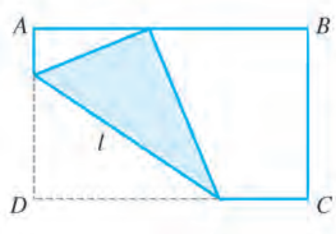
9. 过抛物线$y^2=4x$的焦点F作斜率为$\frac{4}{3}$的弦AB，其中点A在第一象限，求$\frac{AF}{FB}$的值.

10. 在平面直角坐标系xOy中，已知直线$y=x-2$与抛物线$y^2=2x$相交于点A，B. 求证：$OA \perp OB$.

探究·拓展

11. 已知$y_0{}^2=2px_0(p>0)$，点$P(x_0, y_0)$，$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，直线$l$：$x=-\frac{p}{2}$. 求证：点$P$到直线$l$的距离等于$PF$.

12. （操作题）如图，将一张长方形纸片$ABCD$的一只角斜折，使点D总是落在对边AB上，然后展开纸片，得到一条折痕l（为了看清楚，可把直线l画出来）. 这样继续下去，得到若干折痕. 观察这些折痕围成的轮廓，它是什么曲线？



（第12题）

3.3.2 抛物线的几何性质

● 根据抛物线的标准方程 $y^2=2px\ (p>0)$ 可以得到抛物线的哪些几何性质?

抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的主要性质归纳如下:

范　　围	在 y 轴的右侧
对 称 性	关于 x 轴对称
顶　　点	原　　点
开口方向	向　　右

抛物线的对称轴叫作抛物线的轴.

在抛物线的标准方程 $y^2=2px\ (p>0)$ 中,令 $x=\frac{p}{2}$,则 $y=\pm p$. 这就是说,通过抛物线的焦点且垂直于 x 轴的直线与抛物线交于点 $M_1\left(\frac{p}{2},\ -p\right)$ 和 $M_2\left(\frac{p}{2},\ p\right)$. 线段 M_1M_2 叫作抛物线的通径,它的长为 $2p$. 这样,利用抛物线的几何性质和通径的两个端点,可以方便地画出反映抛物线基本特征的简图(图 3-3-5).

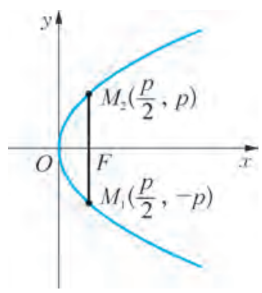


图 3-3-5

例 1 求抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标和准线方程.

解 因为 $2p=4$,即 $p=2$,$\frac{p}{2}=1$,

所以抛物线的焦点坐标为(1, 0),准线方程为 $x=-1$.

例 2 某种汽车前灯的反光曲面与轴截面的交线为抛物线的一段,灯口直径为 197 mm,反光曲面的顶点到灯口的距离是 69 mm. 由抛物线的性质可知,当灯泡安装在抛物线的焦点处时,经反光曲面反射后的光线是平行光线. 为了获得平行光线,应怎样安装灯泡(精确到 1 mm)?

解 如图 3-3-6,在车灯的一个轴截面上建立直角坐标系 xOy.

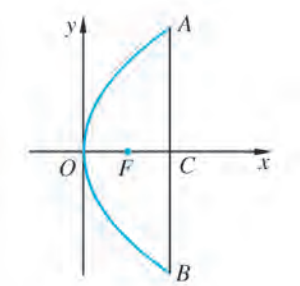


图 3-3-6

设抛物线的方程为 $y^2=2px\ (p>0)$，灯泡应安装在其焦点 F 处.

在 x 轴上取一点 C，使 $OC=69$. 过 C 作 x 轴的垂线，交抛物线于 A，B 两点，线段 AB 就是灯口的直径，即 $AB=197$，所以点 A 的坐标为 $\left(69,\ \dfrac{197}{2}\right)$.

将点 A 的坐标代入方程 $y^2=2px$，解得 $p\approx 70.3$.

所以抛物线的焦点坐标约为$(35,\ 0)$.

答 灯泡应该安装在距顶点约 35 mm 处.

练 习

1. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

(1) $y^2=6x$；　　(2) $x^2=-4y$；

(3) $y^2=-32x$；　　(4) $x^2=42y$.

2. 抛物线 $y=2x^2$ 的焦点坐标是(　　).

A. $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{8},\ 0\right)$

C. $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$　　D. $\left(0,\ \dfrac{1}{8}\right)$

3. 求适合下列条件的抛物线的标准方程：

(1) 焦点为$(0,\ -5)$；

(2) 准线方程为 $x=3$；

(3) 经过点$(-3,\ 4)$；

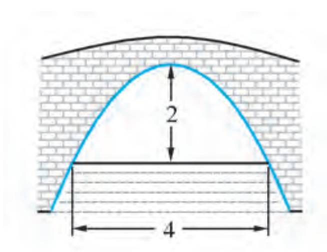
(4) 焦点在 y 轴上，通径的长等于 4.

4. 若 $P(x_0,\ y_0)$是抛物线 $y^2=-32x$ 上一点，F 为抛物线的焦点，则 $PF=$ (　　).

A. x_0+8　　B. x_0-8

C. $8-x_0$　　D. x_0+16

5. 如图，一个抛物线型拱桥，当水面离拱顶 2 m 时，水面宽 4 m. 若水面下降 1 m，求水面宽度(精确到 0.01 m).



(第 5 题)

习题 3.3(2)

感受・理解

1. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

(1) $y^2=-x$；　　(2) $x^2=8y$；

(3) $y^2=ax\ (a>0)$；　　(4) $2y^2+7x=0$.

2. 求适合下列条件的抛物线的标准方程：

(1) 焦点为(1，0)；

(2) 准线方程是 $y=\frac{1}{2}$；

(3) 对称轴为 x 轴，焦点到准线的距离是 4.

3. 已知抛物线 $y^2=4x$ 上一点到焦点的距离为 5，求该点的坐标.

4. 经过抛物线 $y^2=2px$ 的焦点 F 作一条直线与抛物线相交于 P_1，P_2 两点，求证：以线段 P_1P_2 为直径的圆与抛物线的准线相切.

思考·运用

5. 设 m 为实数，已知抛物线的焦点在 y 轴上，点 $M(m，-3)$是抛物线上的一点，M 到焦点的距离是 5，求 m 的值及抛物线的标准方程、准线方程.

6. 已知 M 是抛物线 $y^2=8x$ 上一点，F 是抛物线的焦点，O 为坐标原点. 若 $\angle MFO=120°$，求线段 MF 的长.

7. 设过抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点，A，B 在抛物线准线上的射影分别为 A_1，B_1. 求证：$\angle A_1FB_1$ 是直角.

8. 设过抛物线 $y^2=2px$ 的焦点的一条直线和抛物线有两个交点，且两个交点的纵坐标分别为 y_1，y_2. 求证：$y_1y_2=-p^2$.

探究·拓展

9. (阅读题)在工程中，画拱宽为 $2a$，拱高为 h 的抛物线，常用下面的画法：

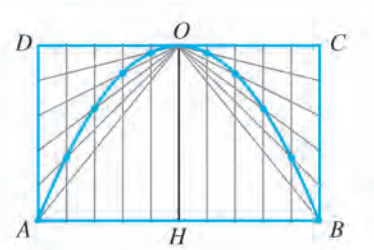
(1) 作矩形 $ABCD$，使 $AB=2a$，$DA=h$；

(2) 分别取 CD，AB 的中点 O，H，把线段 DA，OD，HA 各 n 等分；

(3) 如图连线得到各交点，将交点连成光滑曲线，就得到抛物线的一半；

(4) 用同样的方法画出抛物线的另一半.

你能说明上述画法的正确性吗？



(第 9 题)

链　接

圆锥曲线的统一定义

我们知道，平面内到一个定点 F 的距离和到一条定直线 l(F 不在 l 上)的距离之比等于 1 的动点 P 的轨迹是抛物线.

当这个比值是一个不等于 1 的常数时，动点 P 的轨迹又是什么曲线呢?

图 1 和图 2 分别给出常数为 0.8 和 1.5 时动点 P 的轨迹.

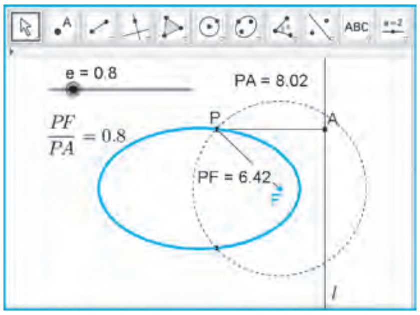


图 1

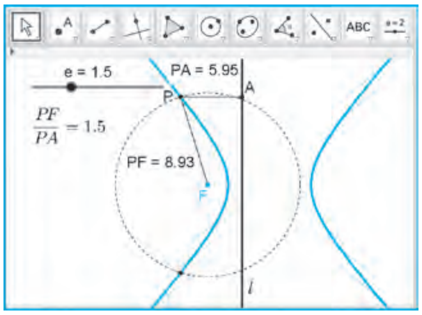


图 2

容易看到，图 1 中的轨迹像椭圆，图 2 中的轨迹像双曲线.

例　已知点 $P(x, y)$ 到定点 $F(c, 0)$ 的距离与它到定直线 l: $x=\dfrac{a^2}{c}$ 的距离之比是常数 $\dfrac{c}{a}$ $(a>c>0)$，求点 P 的轨迹(图 3).

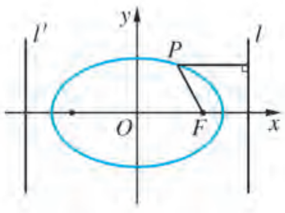


图 3

解　根据题意可得

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left|\dfrac{a^2}{c}-x\right|}=\frac{c}{a},$$

化简得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

令 $a^2-c^2=b^2(b>0)$，上述方程就可化为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

这是椭圆的标准方程.

所以点 P 的轨迹是焦点为 $(-c, 0)$，$(c, 0)$，长轴长、短轴长分别

为 $2a$，$2b$ 的椭圆. 这个椭圆的离心率 e 就是点 P 到定点 F 的距离和它到定直线 l(F 不在 l 上)的距离之比.

类似地,我们可以得到：当点 P 到定点 $F(c, 0)$的距离和它到定直线 l：$x=\dfrac{a^2}{c}$ 的距离之比是常数$\dfrac{c}{a}$ $(c>a>0)$时,这个点的轨迹是双曲线,方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$(其中 $b^2=c^2-a^2$),这个常数就是双曲线的离心率.

这样,圆锥曲线可以统一定义为：平面内到一个定点 F 和到一条定直线 l(F 不在 l 上)的距离之比等于常数 e 的点的轨迹.

当$0<e<1$时,它是椭圆；

当 $e>1$ 时,它是双曲线；

当 $e=1$ 时,它是抛物线.

其中 e 是圆锥曲线的**离心率**,定点 F 是圆锥曲线的**焦点**,定直线 l 是圆锥曲线的**准线**.

根据图形的对称性可知,椭圆和双曲线都有两条准线,对于中心在原点,焦点在 x 轴上的椭圆或双曲线,与焦点 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$对应的准线方程分别为 $x=-\dfrac{a^2}{c}$，$x=\dfrac{a^2}{c}$.

应用与建模

双曲线时差定位法

船在海上航行时，常采用“双曲线时差定位法”测定自己在海上的位置．其主要思想是：

在沿海或岛屿上选择三个适当的地点，建立一个主导航台 F_1 和两个副导航台 F_2，F_3，如图 1 所示．船 S 上的定位仪能接收从三个台发来的无线电信号．因为船 S 到各导航台的距离不等，因此三处同时发出的信号到达船 S 上的时间就有先后，于是定位仪的读数栏里就表示出从 F_1 和 F_2 以及从 F_1 和 F_3 发来的信号到达船 S 上的时间差．根据无线电波在空气中传播的速度为 3×10^5 km/s，就可知道船 S 离开各导航台的距离差，因而船 S 在以 F_1，F_2 为焦点的双曲线和以 F_1，F_3 为焦点的另一双曲线的交点上．

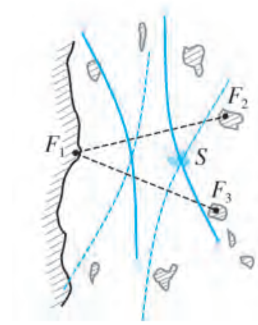


图 1

下面以具体实例加以说明．

现设导航台 F_1 和 F_2 相距 500 n mile（1 n mile＝1.852 km），在船 S 的定位仪上读得两台发出的无线电信号到达的时间差均为 2 000 μs（μs 表示微秒，1 μs＝10^{-6} s），试确定船 S 所在的双曲线方程．

根据上面的分析与计算，在上图的基础上绘制一幅双曲线时差定位图．

分析与求解 （1）建立直角坐标系（如图 2 所示）．已知 $2c=F_1F_2=500$(n mile)，$c=250$．又知 $F_1S-F_2S=\pm 2\,000\times10^{-6}\times3\times10^5=\pm600$(km) $\approx\pm324$(n mile)，得 $a=162$，所以 $b=$

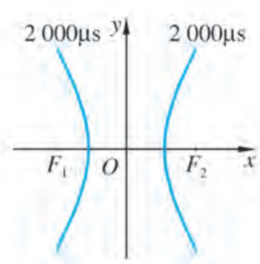


图 2

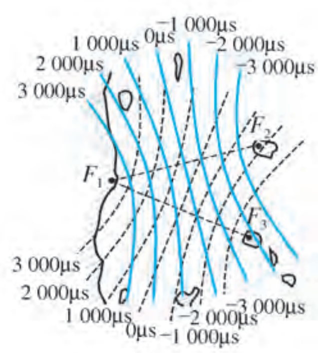


图 3

$\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{250^2-162^2}\approx 190$. 因此，船 S 所在的双曲线方程为 $\frac{x^2}{162^2}-\frac{y^2}{190^2}=1$，在此双曲线上标注 2 000 μs 的字样，表示时差为 2 000 μs 的双曲线.

（2）在图 3 中，画出以 F_1，F_2 为焦点，时差分别为 1 000 μs，2 000 μs，3 000 μs，…的双曲线. 同样画出以 F_1，F_3 为焦点，时差分别为 1 000 μs，2 000 μs，3 000 μs，…的双曲线. 就得到"双曲线时差定位图".

"双曲线时差定位图"实际上是海图的一种，它在海洋地图上标有主导航台 F_1 和副导航台 F_2 之间的等时差线，每条曲线上注有时差，表示在这些曲线上海轮接收到从 F_1，F_2 发出的信号的时差，其中线段 F_1F_2 的垂直平分线也是一条等时差线，时差为 0 μs. 在主导航台 F_1 和另一副导航台 F_3 之间则用另一种颜色画出以它们为焦点的等时差线. 航海时，只需从定位仪上分别读出从 F_1 和 F_2 以及从 F_1 和 F_3 发来的信号的时差，就能在图上找到船所在的两双曲线的交点，便知船在海上的位置了.

对应于同一时差的双曲线有两支，因此交点可能会有四个，其中哪一个交点是船的位置呢？

阅 读

圆锥曲线的起源

圆锥曲线的研究起源于希腊，它与三大几何作图问题中的"立方倍积"问题有关.

"立方倍积"问题是指：求作一个正方体，使其体积是已知正方体体积的 2 倍. 后来被证明，这一问题不能用"尺规作图"完成.

不少古希腊学者研究过"立方倍积"问题. 梅内克缪斯(Menaechmus)的解法是：取三个圆锥，其轴截面顶角分别为直角、锐角和钝角. 各作一平面垂直于一条母线，并与圆锥相截，称截线为"直角圆锥截线""锐角圆锥截线"和"钝角圆锥截线"，即现在的抛物线、椭圆和一支等轴双曲线. 这是最早对圆锥曲线的定名. 他用两条抛物线的交点或一抛物线与一双曲线的交点解决了二倍立方问题.

梅内克缪斯的著作早已失传，他的大部分发明是推测出来的. 根据德国学者布莱慈纳德(Bretschneiter, 1808—1878)考证，推出"直角圆锥截线"(抛物线)的方法如下：

如图 4，Rt△ABC 为直角圆锥轴截面，截面 DEF 垂直于母线 AC，交轴截面于 DE. 在 DE 上任取一点 J，过 J 作与圆锥的轴垂直的截面 HKG，与面 DEF 交于 JK. 作 $DL\parallel HG$，$LM\perp LD$. 于是得

$$JK^2=HJ\cdot JG=LD\cdot JG=JD\cdot DM.$$

设 $x=JD$，$y=JK$，$p=DM$，由上式得

$$y^2=px.$$

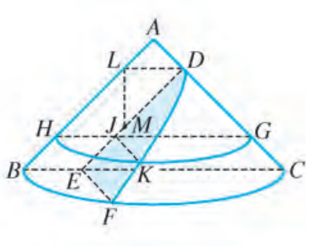


图 4

布莱慈纳德还认为，由锐角圆锥、钝角圆锥，同样地也可推得“锐角圆锥截线”“钝角圆锥截线”.

公元前3世纪，古希腊学者欧几里得(Euclid)、阿基米德(Archimedes)和阿波罗尼斯(Apollonius)在前人的基础上，进一步发展了圆锥曲线的理论.

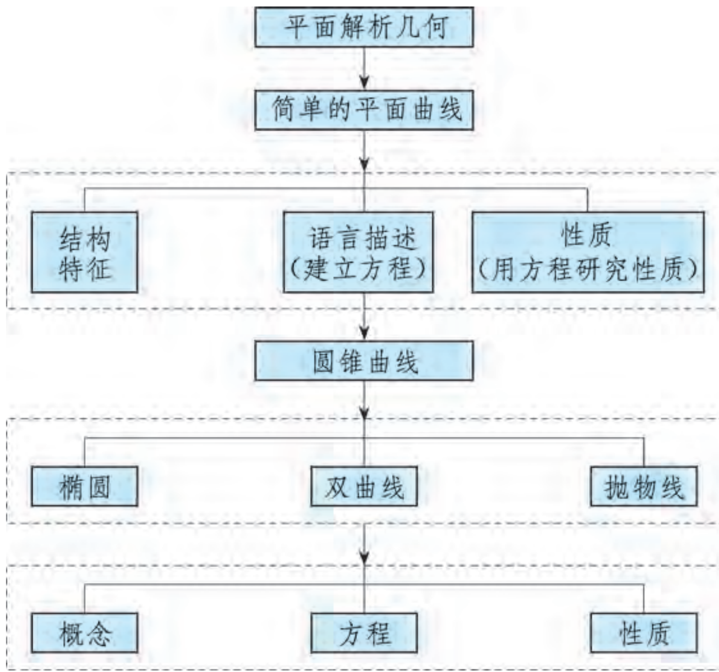
欧几里得、阿基米德和阿波罗尼斯对圆锥曲线的贡献都很大，但欧几里得在这方面的著作都散失了.阿基米德是第一个成功计算出抛物线弓形面积的学者，椭圆作图所用的辅助圆也是他的发明.

阿波罗尼斯处理圆锥曲线的方法与前人不同，他不用三个圆锥，只用一个圆锥，仅需改变截面的位置就可产生三种曲线(欧几里得、阿基米德可能都知道)，他也注意到截面垂直于轴时是一个圆.他最先发现双曲线是有对称中心的曲线，并有两个分支.他对圆锥曲线的叙述很接近现代方式.根据他的叙述，圆锥曲线方程应该是 $y^2=px$(抛物线)，$y^2=px-\frac{p}{d}x^2$(椭圆)，$y^2=px+\frac{p}{d}x^2$(双曲线)(其中 p 为通径，d 为与之对应的直径).因此，可以认为阿波罗尼斯时代已经有了文字叙述的圆锥曲线方程.

本章回顾

本 章 概 览

本章学习了圆锥曲线的概念，建立了圆锥曲线的方程，并通过方程研究了圆锥曲线的基本性质，运用圆锥曲线的方程和性质解决了一些实际问题.



圆锥曲线是一类重要的曲线，圆锥曲线的几何性质在日常生活、社会生产及其他学科中都有着重要而广泛的应用.

运用曲线方程研究曲线的性质及相互关系，是解析几何的基本方法，体现了数形结合的数学思想.

复 习 题

感受·理解

1. 以椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的对称中心为顶点，椭圆的焦点为焦点的抛物线的方程是（　　）.

A. $y^2=4x$　　B. $y^2=-4x$ 或 $x^2=4y$

C. $x^2=4y$　　D. $y^2=4x$ 或 $y^2=-4x$

2. 若双曲线的对称轴为坐标轴，一条渐近线方程为 $2x-y=0$，则双曲线的离心率为（　　）.

A. 5 或$\dfrac{5}{4}$　　B. $\sqrt{5}$ 或$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$ 或$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 5 或$\dfrac{5}{3}$

3. 已知 $\alpha \in [0, \pi]$，试讨论方程 $x^2\sin\alpha + y^2\cos\alpha = 1$ 所表示的曲线的类型.

4. 已知点 M 到椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的右焦点的距离与到直线 $x=6$ 的距离相等，求点 M 的轨迹方程.

5. 在椭圆 $\dfrac{y^2}{45}+\dfrac{x^2}{20}=1$ 上求一点，使它与椭圆两个焦点的连线互相垂直.

6. 设 m，b 为实数，已知椭圆 $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 与双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b}=1$ 有相同的焦点，且椭圆与双曲线交于点 $P\left(\dfrac{\sqrt{10}}{3}, y\right)$，求 m，b 的值.

7. 求与双曲线 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 有公共渐近线，且焦距为 8 的双曲线方程.

8. 设等轴双曲线 C 的中心为 O，焦点为 F_1，F_2，P 为 C 上任意一点，求证：$PO^2=PF_1\cdot PF_2$.

9. 若直线 l 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，与抛物线交于 A，B 两点，且线段 AB 中点的横坐标为 2，求线段 AB 的长.

思考·运用

10. 设 k 为实数，已知双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$，直线 l 的方程为 $y=kx+1$. 当 k 为何值时，直线 l 与双曲线 C：

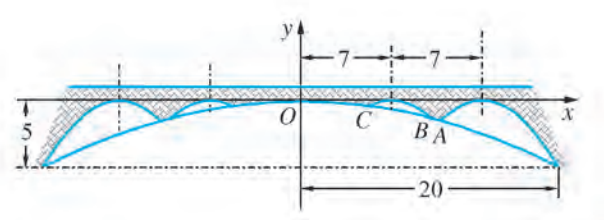
(1) 有两个公共点？

(2) 仅有一个公共点？

(3) 没有公共点？

11. 设抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 F，经过点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点，点 C 在抛物线的准线上，且 $BC \parallel x$ 轴，求证：直线 AC 经过原点 O.

12. 早在一千多年之前，我国已经把溢流孔用于造桥技术，以减轻桥身重量和水流对桥身的冲击. 现设桥拱上有如图所示的 4 个溢流孔，桥拱和溢流孔的轮廓线均为抛物线的一部分，且 4 个溢流孔的轮廓线相同. 根据图上尺寸，试分别求出这些抛物线的方程，及溢流孔与桥拱交点 A，B，C 的位置.



（第 12 题）

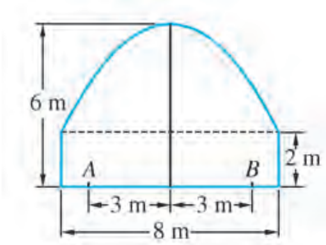
13. 直线 $y=ax+1$ 与双曲线 $3x^2-y^2=1$ 相交于 A，B 两点.

(1) 求 AB 的长；

(2) 当 a 为何值时，以 AB 为直径的圆经过坐标原点？

14. 有一隧道内设双行线公路，其截面由一长方形和一抛物线构成，如图所示. 为保证安全，要求行驶车辆顶部（设为平顶）与隧道顶部在竖直方向上高度之差至少要有 0.5 m. 若行车道总宽度 AB 为 6 m，请计算车辆通过隧道时

的限制高度(精确到 0.1 m).



(第 14 题)

15. 设 a, b 是实数,若椭圆 $ax^2+by^2=1$ 与直线 $x+y=1$ 交于点 A, B,点 M 为 AB 的中点,直线 OM(O 为原点)的斜率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,又 $OA\perp OB$,求 a, b 的值.

探究・拓展

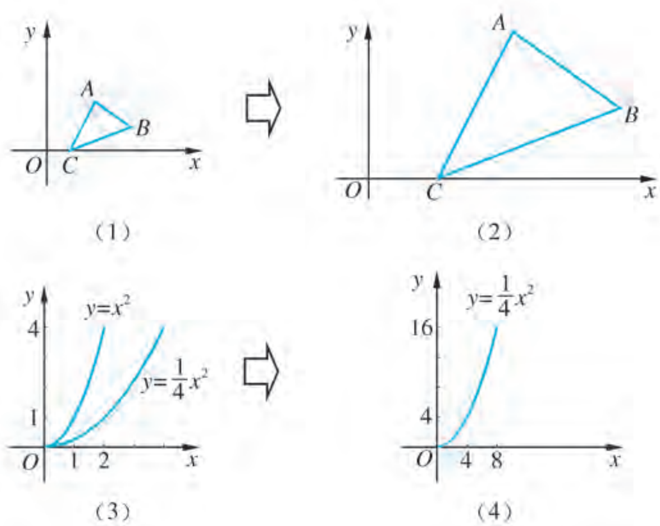
16. (写作题)离心率相同的二次曲线"形状都相同".

我们知道,椭圆的离心率决定了它的"扁圆"程度,双曲线的离心率决定了它的"开口"大小.那么,离心率对抛物线的形状有何影响?为什么所有抛物线的离心率都等于 1?

结论只有一个,任何抛物线的形状都相同(即相似).

抛物线的开口明显有大有小,形状怎么会相同呢?

我们可先用放大镜原理作一个直观的说明.图(1)中的△ABC 在 3 倍放大镜下观察,得到图(2)中的△ABC,这两个三角形是相似的,即"形状相同".



(第 16 题)

对于抛物线,我们以 $y=x^2$ 为例,图(3)中画有抛物线 $y=x^2$ 和 $y=\dfrac{1}{4}x^2$,图(4)是将图(3)中 $y=x^2$ 的图象在 4 倍放大镜下观察得到的形状,它和图(3)中 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 的图象是可以重合的,故两条抛物线的形状相同.

上面的结论对任意给出的两条抛物线都是成立的.

下面我们进一步说明抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 与 $y=Ax^2(A>0)$ 是位

似形，原点是位似中心.

设直线 OP 的方程为 $y=mx\ (m>0)$，不难求出这条直线与两条已知抛物线的交点 $M\left(\frac{m}{a},\frac{m^2}{a}\right)$ 和 $N\left(\frac{m}{A},\frac{m^2}{A}\right)$，于是

$$OM=\frac{m}{a}\sqrt{1+m^2},\ ON=\frac{m}{A}\sqrt{1+m^2},$$

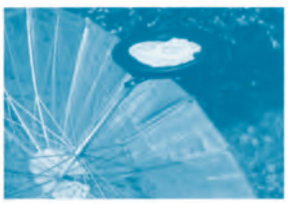
所以 $\frac{OM}{ON}=\frac{A}{a}$，这是一个与直线 OP 无关的常数. 因此，任何两个抛物线的形状都是相同的.

根据上述思路，请你尝试证明：离心率相同的圆锥曲线“形状都相同”. 并以此为素材，写一篇小论文.

17. (阅读题)圆锥曲线的光学性质.

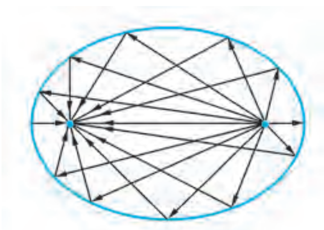
椭圆形的反射面能使从一个焦点发出的信号在另一个焦点汇聚，如从一个焦点发出的光线将汇聚到另一个焦点处(图(1)).

椭圆的这一光学性质应用非常广泛. 碎石机是一种现代医疗仪器，它运用高能冲击波击碎肾结石. 经过准确的测量，将病人的结石置于一个焦点处，而高频冲击波从另一个焦点处射出，经反射的冲击波可击碎焦点处的结石. 用此项医疗技术治疗只需 3～4 天的恢复时间，而传统外科手术治疗约需 2～3 周的恢复时间. 更值得一提的是，其治疗中的死亡率仅为 0.01%，而传统外科手术的约为 2%～3%.

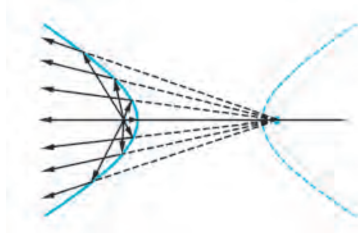


抛物线也有类似的光学性质. 平行于抛物线的对称轴的光线经抛物线壁的反射，光线汇聚于焦点处，这就是“焦点”名称的来源. 运用抛物线的这一性质，人们设计了一种将水和食物加热的太阳灶. 反过来，从焦点处发出的光线，经过抛物线反射后将变成与抛物线的对称轴平行的光线射出，运用这一性质，人们制造了探照灯.

从双曲线的一个焦点发出的光线，经过双曲线反射后，反射光线是散开的，它们好像是从另一个焦点射出的一样(图(2))，因此，用双曲线绕实轴旋转形成的曲面(双叶旋转双曲面)应用也很广泛.



(1)



(2)

(第 17 题)

为了既获得足够的亮度，又使光线尽可能地均匀柔和，专门为摄影师设计的照明灯就往往利用双曲线的光学性质，把反射镜的表面做成双叶旋转双曲面的形状，并让灯丝恰好位于焦点.

请查阅有关资料，了解圆锥曲线光学性质的应用.

本章测试

一、填空题

1. 椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的离心率为________.

2. 抛物线 $x^2=4y$ 的焦点到准线的距离为________.

3. 以双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的左焦点为焦点的抛物线的标准方程为________.

4. 椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 上横坐标为 2 的点到右焦点的距离为________.

5. 若经过双曲线 $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{8}=1$ 的一个焦点，且垂直于实轴的直线 l 与双曲线交于 A，B 两点，则线段 AB 的长为________.

6. 椭圆经过点（2，$-\sqrt{6}$）和（$2\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$），则该椭圆的标准方程为__________.

二、选择题

7. 椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的焦点的坐标为（　　）.

A. $(-\sqrt{14},0)$，$(\sqrt{14},0)$　　B. $(-2,0)$，$(2,0)$

C. $(0,-\sqrt{14})$，$(0,\sqrt{14})$　　D. $(0,-2)$，$(0,2)$

8. 设双曲线 C 以椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 长轴的两个端点为焦点，以椭圆的焦点为顶点，则双曲线 C 的方程为（　　）.

A. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$　　B. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$

C. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$　　D. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

9. 已知双曲线经过点$(-\sqrt{3},6)$，若它的两条渐近线方程是 $y=\pm 3x$，则双曲线的方程为（　　）.

A. $\frac{x^2}{9}-y^2=1$　　B. $\frac{y^2}{9}-x^2=1$

C. $\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{y^2}{27}-\frac{x^2}{3}=1$

10. 若抛物线 $y^2=2x$ 上的一点 M 到坐标原点 O 的距离为$\sqrt{3}$，则点 M 到该抛物线焦点的距离为（　　）.

A. 3　　B. 2

C. $\frac{3}{2}$　　D. 1

三、解答题

11. 已知抛物线的准线方程为 $y=-2$，求抛物线的标准方程.

12. 已知双曲线的实轴长为 8，离心率为$\frac{3}{2}$，求双曲线的标准方程.

13. 已知椭圆的焦点为 $F_1(-6,0)$，$F_2(6,0)$，且该椭圆过点 $P(5,2)$.

(1) 求椭圆的标准方程；

(2) 若椭圆上的点 $M(x_0,y_0)$满足 $MF_1 \perp MF_2$，求 y_0的值.

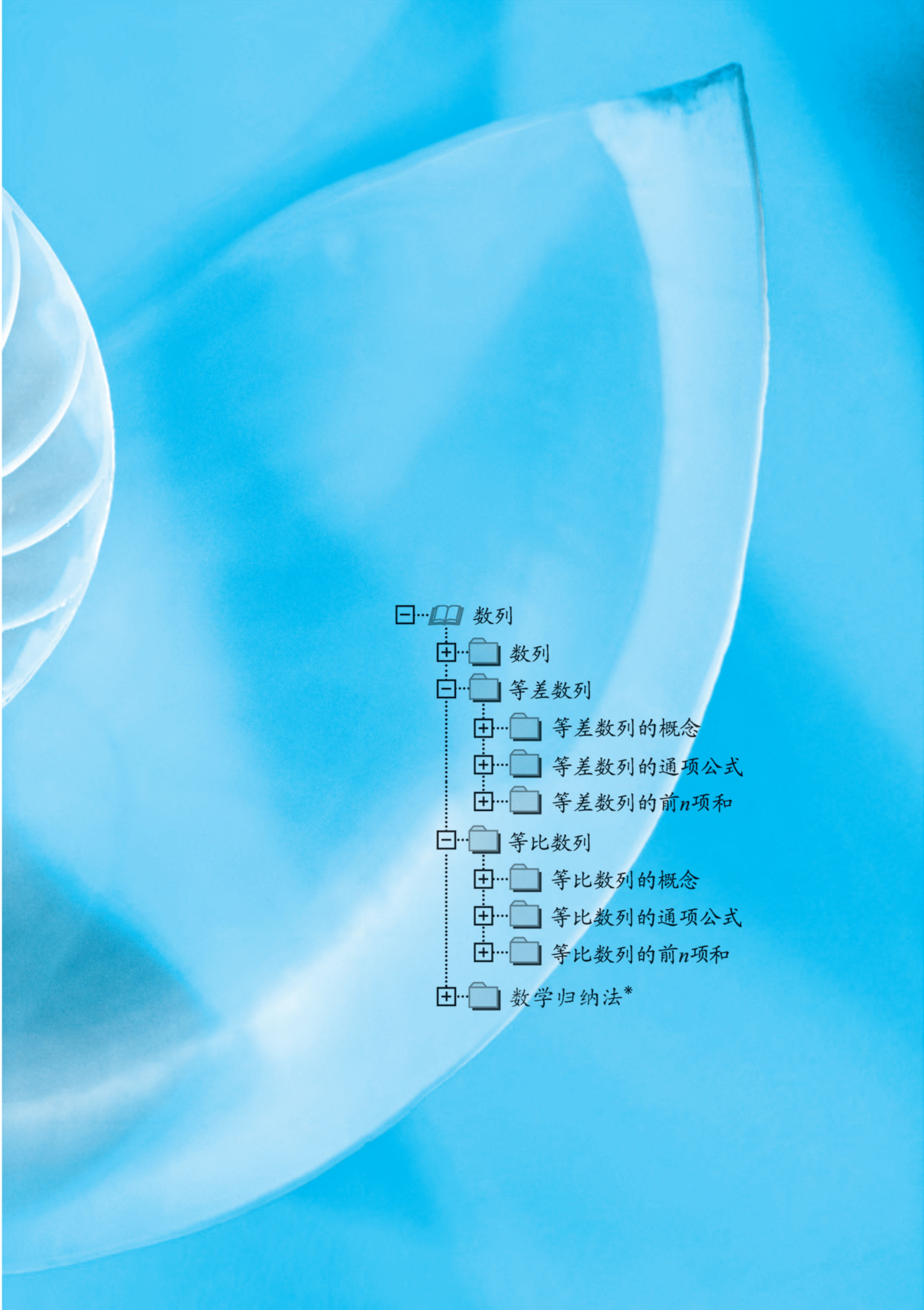
14. 设 m 为实数，已知方程 $\dfrac{x^2}{4-m}-\dfrac{y^2}{2+m}=1$ 表示双曲线.

(1) 求 m 的取值范围；

(2) 若 $m=2$，求双曲线的焦点到渐近线的距离.

15. 已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 与直线 l：$y=x+b$ 相交于 A，B 两点，线段 AB 中点的横坐标为 5，且抛物线 C 的焦点到直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$，试求 p，b 的值.

第 4 章　数　　列



- 数列
  - 数列
  - 等差数列
    - 等差数列的概念
    - 等差数列的通项公式
    - 等差数列的前n项和
  - 等比数列
    - 等比数列的概念
    - 等比数列的通项公式
    - 等比数列的前n项和
  - 数学归纳法*

数学揭示着事物的本质与内核，它以形式简单而内涵丰富为其特征.

——狄尔曼

自然世界呈现各式各样的现象，有些现象与“数”紧密联系着：树木生长过程中枝丫的数目，果实的个数与排列方式……

这些纷杂的现象背后有规律吗？

观察某株树木的枝丫数，第一年为 1，第二年为 1，第三年为 2，第四年为 3，第五年为 5，第六年为 8，第七年为 13，第八年为 21，第九年为 34，第十年为 55，第十一年为 89，第十二年为 144……

将它们按年份排列起来，就是下面的一列数：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，…

可以发现，这列数有许多规律. 例如，从第三个数开始，每一个数都等于前两个数的和；再如，相邻两个数的比值（前一个数与后一个数之比）越来越接近于某个确定的常数……

上面的研究过程，大致思路是：

（1）首先，用“数”刻画现象中的状态；

（2）将这些数按一定的顺序排成一列（与正整数建立对应关系）；

（3）研究这列数的规律，用这些规律刻画并认识变化的状态和过程.

仿照这个过程，我们可以进一步去研究自然界、社会生活中的类似现象，探索这些现象背后的规律，以解决具体的实际问题. 在研究过程中，我们

- 应该建立怎样的数学模型来刻画这类现象？
- 用这些数学模型能够解决哪些问题？

4.1 数列

考察下面的问题：

某剧场有 30 排座位，第一排有 20 个座位，从第二排起，后一排都比前一排多 2 个座位(图 4-1-1)，那么各排的座位数依次为

$$20,\ 22,\ 24,\ 26,\ 28,\ \cdots. \qquad ①$$

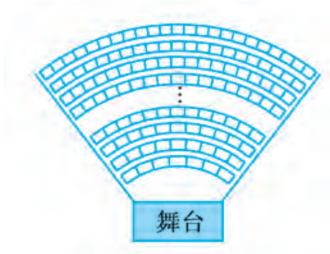


图 4-1-1

人类在 1740 年发现了一颗彗星，并推算出这颗彗星每隔 83 年出现一次，那么从发现那次算起，这颗彗星出现的年份依次为

$$1740,\ 1823,\ 1906,\ 1989,\ 2072,\ \cdots. \qquad ②$$

某种细胞，如果每个细胞每分钟分裂为 2 个，那么每过 1 分钟，1 个细胞分裂的个数依次为

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots. \qquad ③$$

"捶"同"棰".

"一尺之捶，日取其半，万世不竭"的意思为：一尺长的木棒，每日取其一半，永远也取不完. 如果将"一尺之捶"视为 1 份，那么每日剩下的部分依次为

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \cdots. \qquad ④$$

某种树木第 1 年长出幼枝，第 2 年幼枝长成粗干，第 3 年粗干可生出幼枝(图 4-1-2)，那么按照这个规律，各年树木的枝干数依次为

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \cdots. \qquad ⑤$$

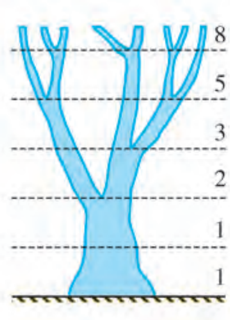


图 4-1-2

从 1984 年到 2016 年,我国共参加了 9 次夏季奥运会,各次参赛获得的金牌总数依次为

$$15,\ 5,\ 16,\ 16,\ 28,\ 32,\ 51,\ 38,\ 26. \qquad ⑥$$

● 这些问题有什么共同的特点?

按照一定次序排列的一列数称为**数列**(sequence of number),数列中的每个数都叫作这个数列的**项**(term). 项数有限的数列叫作有穷数列,项数无限的数列叫作无穷数列.

数列的一般形式可以写成

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

简记为$\{a_n\}$,其中 a_1 称为数列$\{a_n\}$的第 1 项或**首项**(leading term),a_2 称为第 2 项……a_n 称为第 n 项.

在数列$\{a_n\}$中,对于每一个正整数 n(或 $n \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$),都有一个数 a_n 与之对应,因此,数列可以看成以正整数集 $\mathbf{N}^*$(或它的有限子集$\{1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$)为定义域的函数 $a_n = f(n)$,当自变量按照从小到大的顺序依次取值时,所对应的一列函数值. 反过来,对于函数 $y = f(x)$,如果 $f(i)(i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 有意义,那么我们可以得到一个数列

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(n),\ \cdots.$$

例 1 已知数列的第 n 项 a_n 为 $2n-1$,写出这个数列的首项、第 2 项和第 3 项.

解 首项为 $a_1 = 2\times 1-1 = 1$;

第 2 项为 $a_2 = 2\times 2-1 = 3$;

第 3 项为 $a_3 = 2\times 3-1 = 5$.

在例 1 中,第 n 项 a_n 可用一个公式 $2n-1$ 来表示. 只要依次用 1,2,3,…代替公式中的 n,就可以求出这个数列的各项 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$

一般地,如果数列$\{a_n\}$的第 n 项与序号 n 之间的关系可以用一个公式来表示,那么这个公式叫作这个数列的**通项公式**. 例如:

数列①的通项公式为 $a_n = 2n+18$,其中 $n \in \mathbf{N}^*$,$n \leqslant 30$;数列③的通项公式为 $a_n = 2^{n-1}$,其中 $n \in \mathbf{N}^*$;等等.

数列可以由通项公式来给定,也可以通过列表或图象来表示.

例 2 已知数列$\{a_n\}$的通项公式,写出这个数列的前 5 项,并作出它的图象:

(1) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$; (2) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$.

解　我们用列表法分别给出这两个数列的前 5 项.

n	1	2	3	4	5
$a_n=\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{5}{6}$
$a_n=\dfrac{(-1)^n}{2^n}$	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	$-\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{16}$	$-\dfrac{1}{32}$

它们的图象如图 4－1－3 所示.

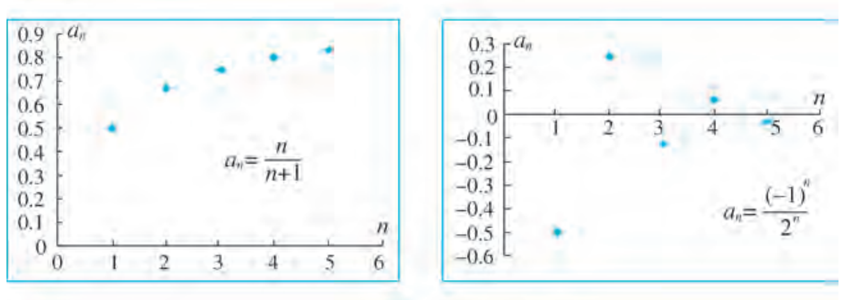


图 4－1－3

不难发现，在数列①中，某剧场有 30 排座位，第一排有 20 个座位，从第二排起，后一排都比前一排多 2 个座位，也就是说，

$$a_1=20,$$
$$a_2=a_1+2,$$
$$a_3=a_2+2,$$
$$\cdots$$
$$a_{30}=a_{29}+2.$$

即有

$$a_1=20,$$
$$a_{n+1}=a_n+2\ (n\in\mathbf{N}^*,\ n\leqslant 29).$$

由上面数列的第 1 项，以及 a_{n+1} 与 a_n 的关系，可以写出这个数列的各项.

一般地，如果已知一个数列$\{a_n\}$的第 1 项(或前几项)，且任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}(或前几项)间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫作这个数列的**递推公式**. 递推公式也是给定数列的一种方法.

例如，数列⑤可以用下列递推公式给出

$$a_1=1,$$
$$a_2=1,$$
$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,\text{其中 } n\in\mathbf{N}^*.$$

例 3 试分别根据下列条件,写出数列$\{a_n\}$的前 5 项:

(1) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$;

(2) $a_1=2$, $a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

解 (1) 因为 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$,所以

$$a_3=a_2+2a_1=2+2\times1=4,$$
$$a_4=a_3+2a_2=4+2\times2=8,$$
$$a_5=a_4+2a_3=8+2\times4=16.$$

因此,数列$\{a_n\}$的前 5 项依次为 1, 2, 4, 8, 16.

(2) 因为 $a_1=2$, $a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$,所以

$$a_2=2-\frac{1}{a_1}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$
$$a_3=2-\frac{1}{a_2}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3},$$
$$a_4=2-\frac{1}{a_3}=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4},$$
$$a_5=2-\frac{1}{a_4}=2-\frac{4}{5}=\frac{6}{5}.$$

因此,数列$\{a_n\}$的前 5 项依次为 2, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{6}{5}$.

例 4 写出数列的一个通项公式,使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) $\dfrac{1}{1\times2}$, $-\dfrac{1}{2\times3}$, $\dfrac{1}{3\times4}$, $-\dfrac{1}{4\times5}$;

(2) 0, 2, 0, 2.

解 (1) 这个数列的前 4 项的绝对值都是分数,分子都为 1,分母都等于序号与序号加 1 的积,且奇数项为正,偶数项为负,所以它的一个通项公式是

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

求数列的通项公式,就是求 a_n 与 n 的对应关系 $a_n=f(n)$.

(2) 这个数列的奇数项是 0,偶数项是 2,所以它的一个通项公式是

$$a_n=1+(-1)^n.$$

信息技术

● EXCEL

已知数列的通项公式,我们可以在 Excel 中方便地作出这个数列的图象,进而观察它的变化趋势.

例如，在单元格 A1，A2 内分别输入 1，2，选中这两个单元格后向下拖曳填充柄，生成序号 1，2，3，…. 在 B1 内输入“=A1/(A1 +1)”，双击 B1 的填充柄，就得到与序号相对应的项.

选中 A，B 两列，插入“图表”，选择“XY 散点图”，可得数列 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ 的图象(图 4-1-4).

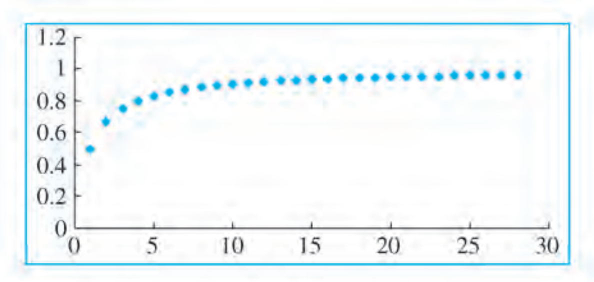


图 4-1-4

● GGB

在 GGB 中，可用“序列[ ]”得到数列及图象. 例如，在输入框中输入“序列[(n，n/(n+1))，n，1，20]”就可得到数列 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ 的 20 个序对(n，a_n)及图象(图 4-1-5).

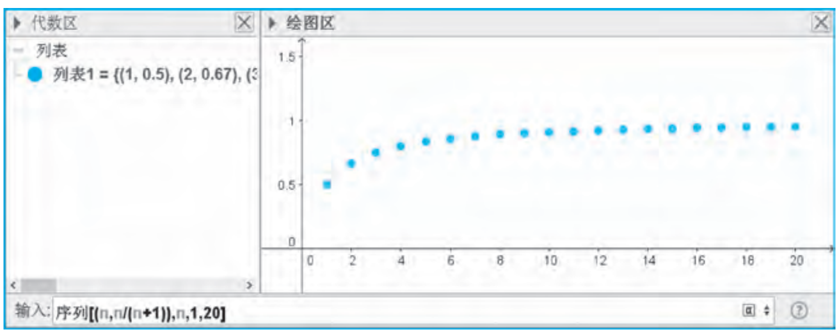


图 4-1-5

练 习

1. 举出一些数列的例子.
2. 根据数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前 5 项：
(1) $a_n=1-3n$； (2) $a_n=(-1)^n 2n$.
3. 根据数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的第 6 项和第 10 项：
(1) $a_n=n^2+n$； (2) $a_n=5-2^{n-1}$.
4. 37 是否为数列 $\{3n+1\}$ 中的项？如果是，那么是第几项？
5. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：
(1) -1，2，-3，4；
(2) 2，4，6，8；
(3) 1，4，9，16；
(4) $1-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}$.
6. 分别作出本节开始问题中数列①③的图象.

习题 4.1

感受·理解

1. 分别写出下面的数列：

(1) 在 0 到 16 之间的奇数按从小到大的顺序构成的数列；

(2) 在 0 到 16 之间的质数按从小到大的顺序构成的数列.

2. 根据数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=\dfrac{1}{n^2}$；

(2) $a_n=(-1)^n(n^2-1)$；

(3) $a_n=|2n-7|$.

3. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 2，4，8，16；　　(2) 1，8，27，64；

(3) $-1，\dfrac{1}{2}，-\dfrac{1}{3}，\dfrac{1}{4}$；　　(4) $1，\sqrt{2}，\sqrt{3}，2$.

4. 写出一个分别满足下列条件的数列$\{a_n\}$的通项公式：

(1) 从第 2 项起，每一项都比它的前一项大 2；

(2) 各项均不为 0，且从第二项起，每一项都是它的前一项的 3 倍.

5. 已知数列$\{n(n+2)\}$.

(1) 写出这个数列的第 8 项和第 20 项；

(2) 323 是不是这个数列中的项？如果是，那么是第几项？

6. 写出数列$\{a_n\}$的前 5 项，并作出它的图象：

(1) $a_n=2n+3$；　　(2) $a_n=3$；

(3) $a_n=\dfrac{1}{3}(2^n-1)$；　　(4) $a_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数；}\\ 2n-1, & n\text{ 为偶数.}\end{cases}$

思考·运用

7. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=n^2+3n+2$，那么 56 是这个数列中的项吗？如果是，那么是第几项？

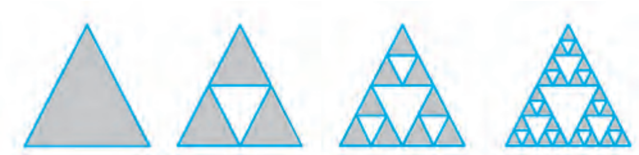
8. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=n^2-8n+5$.

(1) 写出这个数列的前 5 项，并作出它的图象；

(2) 这个数列中有没有最小的项？

探究·拓展

9. 下图中的三角形称为谢尔宾斯基(Sierpinski)三角形. 图中从左向右的四个三角形中，着色三角形的个数依次构成数列$\{a_n\}$的前 4 项，写出数列$\{a_n\}$的一个通项公式，并作出它的图象.



(第 9 题)

4.2 等差数列

回顾本章4.1节开始我们遇到的数列①②，再考察下面的问题：

第23届到第31届奥运会举行的年份依次为

$$1984,\ 1988,\ 1992,\ 1996,\ 2000,\ 2004,\ 2008,\ 2012,\ 2016.$$

某电信公司的一种计费标准是：通话时间不超过3 min，收话费0.2元，以后每分钟(不足1 min按1 min计)收话费0.1元．那么通话费按从小到大的次序依次为

$$0.2,\ 0.2+0.1,\ 0.2+0.1\times2,\ 0.2+0.1\times3,\ \cdots.$$

“本利和”是指本金与利息的和，按照单利计算本利和的公式是

本利和＝本金×(1＋利率×存期)．

如果1年期储蓄的月利率为1.65‰，那么将10 000元分别存1个月、2个月、3个月……12个月，所得的本利和依次为

$$10\ 000+16.5,\ 10\ 000+16.5\times2,\ \cdots,\ 10\ 000+16.5\times12.$$

● 上面这些数列有什么共同的特点？

4.2.1 等差数列的概念

在等差数列$\{a_n\}$中，始终有

$$a_{n+1}-a_n=d.$$

一般地，如果一个数列从第二项起，每一项减去它的前一项所得的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫作**等差数列**(arithmetic progression)，这个常数叫作等差数列的**公差**(common difference)，公差通常用d表示．

思考

你能再举出一些等差数列的例子吗？

例1 判断下列数列是否为等差数列：

(1) 1，1，1，1，1；

(2) 4，7，10，13，16；

(3) －3，－2，－1，1，2，3.

解 (1) 所给数列是首项为1，公差为0的等差数列．

(2) 所给数列是首项为4，公差为3的等差数列．

(3) 因为

$$(-1)-(-2)\neq1-(-1),$$

所以这个数列不是等差数列．

例 2 求出下列等差数列中的未知项：

(1) 3，a，5；

(2) 3，b，c，-9.

解 (1) 根据题意，得

$$a-3=5-a,$$

解得

$$a=4.$$

(2) 根据题意，得

$$\begin{cases} b-3=c-b, \\ c-b=-9-c, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} b=-1, \\ c=-5. \end{cases}$$

例 3 (1) 在等差数列$\{a_n\}$中，是否有

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}(n\geqslant 2)?$$

(2) 在数列$\{a_n\}$中，如果对于任意的正整数 $n(n\geqslant 2)$，都有

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},$$

那么数列$\{a_n\}$一定是等差数列吗？

解 (1) 因为$\{a_n\}$是等差数列，所以

$$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2),$$

所以

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}.$$

(2) 在数列$\{a_n\}$中，如果对于任意的正整数 $n(n\geqslant 2)$，都有

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},$$

从而

$$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2).$$

这表明，这个数列从第 2 项起，后一项减去前一项所得的差始终相等，所以数列$\{a_n\}$是等差数列.

练 习

1. 判断下列数列是否为等差数列：

(1) -1，-1，-1，-1，-1；

(2) 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$；

(3) 1，0，1，0，1，0；

(4) 2，4，6，8，10，12；

(5) 7，12，17，22，27.

2. 从下面的月历表中，请你用彩笔涂出3个等差数列，满足以下要求：

(1) 每个数列的项所在的框是相连接的(顶点相连或者边相连)；

(2) 三个数列的公差是不同的.

日	一	二	三	四	五	六
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

3. 已知下列数列是等差数列，试在括号内填上适当的数：

(1) ( )，5，10；　　(2) 1，$\sqrt{2}$，( )；

(3) 31，( )，( )，10.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

(1) 如果 $a_1=2$，$a_3=6$，求公差 d 和 a_2；

(2) 如果 $a_2=2$，$a_3=5$，求公差 d 和 a_1；

(3) 如果 $a_1=1$，$a_2=4$，求公差 d 和 a_6.

5. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式，判断它是否为等差数列：

(1) $a_n=3n+1$；　　(2) $a_n=4-2n$；

(3) $a_n=n^2$；　　(4) $a_n=0$.

6. 已知 a_1，a_2，a_3，…，a_n，a_{n+1}，…，a_{2n} 是公差为 d 的等差数列.

(1) a_n，a_{n-1}，…，a_2，a_1 也是等差数列吗？如果是，试求出公差；

(2) a_2，a_4，a_6，…，a_{2n} 也是等差数列吗？如果是，试求出公差.

4.2.2 等差数列的通项公式

观察等差数列$\{a_n\}$

$$4，7，10，13，16，\cdots，$$

如何写出它的第100项 a_{100} 呢？

我们有

$$a_1=4，$$
$$a_2=7=4+3，$$
$$a_3=10=4+3\times 2，$$
$$a_4=13=4+3\times 3，$$
$$\cdots$$

从而

$$a_{100}=4+3\times 99=301.$$

设$\{a_n\}$是一个首项为 a_1，公差为 d 的等差数列，你能写出它的第 n 项 a_n 吗？

一般地，对于等差数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n，有

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

这就是等差数列$\{a_n\}$的通项公式，其中 a_1 为首项，d 为公差.

证明 因为$\{a_n\}$为等差数列，所以当 $n \geqslant 2$ 时，有

$$\begin{aligned}&a_2 - a_1 = d,\\&a_3 - a_2 = d,\\&\cdots\\&a_n - a_{n-1} = d.\end{aligned}$$

将上面 $n-1$ 个等式的两边分别相加，得

$$a_n - a_1 = (n-1)d,$$

所以 $$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

当 $n = 1$ 时，上面的等式也成立.

例 4 在等差数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_1 = 3$，公差 $d = -2$，求 a_6；

(2) 已知 $a_3 = 10$，$a_9 = 28$，求 a_n.

解 (1) 由等差数列的通项公式，得

$$a_6 = 3 + (6-1)(-2) = -7.$$

(2) 设等差数列的公差为 d，那么

$$\begin{cases}a_1 + 2d = 10,\\ a_1 + 8d = 28,\end{cases}$$

解得 $$\begin{cases}a_1 = 4,\\ d = 3.\end{cases}$$

所以 $$a_n = 4 + (n-1)\cdot 3 = 3n + 1.$$

例 5 第一届现代奥运会于 1896 年在希腊雅典举行，此后每 4 年举行一次. 奥运会如因故不能举行，届数照算. 按此规则，问：2050 年举行奥运会吗?

解 由题意知，举行奥运会的年份构成的数列是一个以 1 896 为首项，4 为公差的等差数列. 这个数列的通项公式为

$$\begin{aligned}a_n &= 1\,896 + 4(n-1)\\&= 1\,892 + 4n \quad (n \in \mathbf{N}^*).\end{aligned}$$

假设 $a_n = 2\,050$，则 $2\,050 = 1\,892 + 4n$，解得 $n = 39.5$.

所以 $a_n = 2\,050$ 无正整数解.

答 按此规则，2050 年不举行奥运会.

例 6 已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n = 2n-1$，求首项 a_1 和公差 d.

解

$$a_1 = 2\times1-1 = 1,$$

$$a_2 = 2\times2-1 = 3,$$

所以 $$d = a_2 - a_1 = 3-1 = 2.$$

或 $d = a_{n+1} - a_n = 2(n+1)-1-(2n-1) = 2.$

在例 6 中，等差数列的通项公式 $a_n = 2n-1$ 是关于 n 的一次式，从图象上看(图 4-2-1)，表示这个数列的各点(n, a_n)均在直线 $y = 2x-1$ 上.

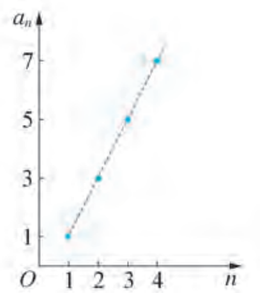


图 4-2-1

思 考

如果一个数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n = kn+b$，其中 k，b 都是常数，那么这个数列一定是等差数列吗?

练 习

1. 求下列等差数列的第 n 项：

 (1) 2，6，10，…；

 (2) 13，9，5，…；

 (3) $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，….

2. (1) 求等差数列 8，5，2，…的第 20 项.

 (2) 等差数列-5，-9，-13，…的第几项是-401?

 (3) -20 是不是等差数列 0，$-\frac{7}{2}$，-7，…的项? 如果是，那么是第几项? 如果不是，请说明理由.

3. 等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d，项数为 n.

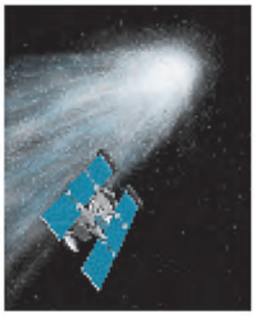
 (1) 已知 $a_1 = 3$，$d = 2$，$n = 6$，求 a_n；

 (2) 已知 $a_1 = 1$，$d = 2$，$a_n = 15$，求 n；

 (3) 已知 $a_1 = \frac{1}{2}$，$n = 5$，$a_n = 8$，求 d；

 (4) 已知 $d = -\frac{3}{2}$，$n = 12$，$a_n = -8$，求 a_1.

4. 已知等差数列的通项公式为 $a_n = 1-\frac{1}{2}n$，求它的首项和公差，并画出它的图象.



5. 诺沃尔(Knowall)在1740年发现了一颗彗星,并推算出在1823年、1906年、1989年……人类都可以看到这颗彗星,即彗星每隔83年出现一次.

(1) 从发现那次算起,彗星第8次出现是在哪一年?

(2) 你认为这颗彗星会在2500年出现吗?为什么?

6. 某滑轮组由直径成等差数列的6个滑轮组成.已知最小和最大的滑轮的直径分别为15 cm和25 cm,求中间四个滑轮的直径.

7. 在等差数列$\{a_n\}$中,

(1) 已知$a_5=19$, $a_8=10$,求a_1和公差d;

(2) 已知$a_4=10$, $a_{10}=4$,求a_{14}.

习题 4.2(1)

感受·理解

1. 判断下列数列是否为等差数列:

(1) $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$; (2) 4, 2, 0, -2, -4;

(3) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2.

2. 求出下列等差数列中的未知项:

(1) a, b, -10, c, -20; (2) x, lg 3, lg 6, y.

3. 求下列等差数列的第n项:

(1) $-1,3,7,11,\cdots$;

(2) $13,8,3,-2,\cdots$;

(3) $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, -1, $-\frac{5}{3}$, $\cdots$.

4. 在等差数列$\{a_n\}$中,

(1) 已知$a_1=-1$,公差$d=4$,求a_8;

(2) 已知公差$d=-\frac{1}{3}$, $a_7=8$,求a_1;

(3) 已知$a_1=9$,公差$d=-2$, $a_n=-15$,求n.

5. 在等差数列$\{a_n\}$中,

(1) 已知$a_3=31$, $a_7=76$,求a_1和公差d;

(2) 已知$a_4=4$, $a_8=-4$,求a_{12};

(3) 已知$a_3=7$, $a_6=16$,求a_{10};

(4) 已知$a_1+a_6=12$, $a_4=7$,求a_9.

6. 一个等差数列的第40项等于第20项与第30项的和,且公差是-10,试求首项和第10项.

7. 一种变速自行车后齿轮组由5个齿轮组成,它们的齿数成等差数列,其中最小和最大的齿轮的齿数分别为12和28,求中间三个齿轮的齿数.

8. 已知等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=16$,公差$d=-\frac{3}{4}$.

(1) 此等差数列中从第几项开始是负数?

(2) 当n为何值时,$|a_n|$最小?

9. 三个数成等差数列,它们的和是15,它们的平方和等于83,求这三个数.

10. 图(1)是一个三角形,分别连接这个三角形三边的中点,将原三角形剖分成 4 个三角形(图(2)),再分别连接图(2)中间的一个小三角形三边的中点,又可将原三角形剖分成 7 个三角形(图(3)). 依此类推,第 n 个图中原三角形被剖分为 a_n 个三角形.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 第 100 个图中原三角形被剖分为多少个三角形?

(第 10 题)

11. 如果 a, A, b 这三个数成等差数列,那么 $A=\frac{a+b}{2}$. 我们把 $A=\frac{a+b}{2}$ 叫作 a 和 b 的**等差中项**. 试求下列各组数的等差中项:

(1) $7+3\sqrt{5}$ 和 $7-3\sqrt{5}$;

(2) $(m+n)^2$ 和 $(m-n)^2$.

12. 已知等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1,公差为 d.

(1) 将数列$\{a_n\}$中的每一项都乘以常数 a,所得的新数列仍是等差数列吗? 如果是,那么公差是多少?

(2) 由数列$\{a_n\}$中的所有奇数项按原来的顺序组成的新数列$\{c_n\}$是等差数列吗? 如果是,求出它的首项和公差.

思考・运用

13. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,求证: $a_n-a_m=(n-m)d$,其中 $n,m\in \mathbf{N}^*$.

14. 已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个无穷等差数列,公差分别为 d_1 和 d_2,求证:数列$\{a_n+b_n\}$是等差数列,并求它的公差.

15. 已知$\{a_n\}$是等差数列,当 $m+n=p+q$ 时,是否一定有 $a_m+a_n=a_p+a_q$?

16. 在等差数列$\{a_n\}$中,已知 $a_p=q$, $a_q=p(p\neq q)$,求 a_{p+q}.

17. 如果数列$\{a_n\}$满足:存在正整数 k,对任意的 $n\in \mathbf{N}^*$, $n>k$,都有 $a_n=\frac{a_{n+k}+a_{n-k}}{2}$,那么数列$\{a_n\}$是等差数列吗?

探究・拓展

这个"正方形筛子"的奥妙在于:如果某个自然数 n 出现在表中,那么 $2n+1$ 肯定不是质数;如果 n 在表中不出现,那么 $2n+1$ 肯定是质数.

18. 1934 年,东印度(今孟加拉国)学者森德拉姆(Sundaram)发现了"正方形筛子":

4	7	10	13	16	…
7	12	17	22	27	…
10	17	24	31	38	…
13	22	31	40	49	…
16	27	38	49	60	…
…	…	…	…	…	…

(1) 这个"正方形筛子"的每一行有什么特点? 每一列呢?

(2) "正方形筛子"中位于第 100 行的第 100 个数是多少?

4.2.3 等差数列的前 n 项和

先考察图 4-2-2. 这是某仓库堆放的一堆钢管，最上面的一层有 4 根钢管，下面的每一层都比上一层多一根，最下面的一层有 9 根，怎样计算这堆钢管的总数呢？

假设在这堆钢管旁边倒放着同样一堆钢管(图 4-2-3).

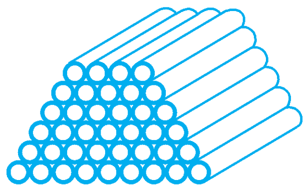


图 4-2-2

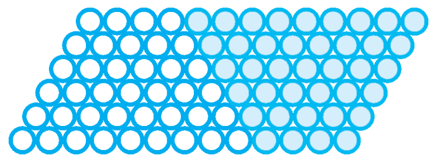


图 4-2-3

这样，每层的钢管数都等于 4+9，共有 6 层，从而原来一堆钢管的总数为

$$\frac{6\times(4+9)}{2}=39.$$

一般地，对于数列$\{a_n\}$，把 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 称为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，记作 S_n.

如何求等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n？

设等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d，则

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+\cdots+a_n\\&=a_1+(a_1+d)+\cdots+[a_1+(n-1)d].\end{aligned}\quad ①$$

把各项的次序反过来，S_n 又可以写成

$$\begin{aligned}S_n&=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1\\&=a_n+(a_n-d)+\cdots+[a_n-(n-1)d].\end{aligned}\quad ②$$

由①+②，得

$$\begin{aligned}2S_n&=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)\\&=n(a_1+a_n),\end{aligned}$$

由此可得等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式

等差数列前 n 项的和等于首末两项和的一半的 n 倍.

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

根据等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，又可得到

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

例 1 设 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和.

(1) 已知 $a_1=3$，$a_{50}=101$，求 S_{50}；

(2) 已知 $a_1=3$，公差 $d=\dfrac{1}{2}$，求 S_{10}.

解 (1) 根据等差数列前 n 项和公式，得

$$S_{50}=\frac{3+101}{2}\times 50=2\ 600.$$

(2) 根据等差数列前 n 项和公式，得

$$S_{10}=10\times 3+\frac{10\times 9}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{105}{2}.$$

例 2 在等差数列$\{a_n\}$中，已知公差 $d=\dfrac{1}{2}$，$a_n=\dfrac{3}{2}$，前 n 项和 $S_n=-\dfrac{15}{2}$，求 a_1 及 n.

解 由题意得

$$\begin{cases}\dfrac{a_1+\dfrac{3}{2}}{2}\times n=-\dfrac{15}{2}, & ①\\[2ex] a_1+(n-1)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}. & ②\end{cases}$$

在等差数列的通项公式与前 n 项和公式中，共含有 a_1，d，n，a_n，S_n 五个量，只要已知其中的三个量，就可以求出其余的两个量.

由②，得 $a_1=-\dfrac{1}{2}n+2.$

代入①后化简，得 $n^2-7n-30=0.$

解得 $n=10$ 或 -3（舍去），从而 $a_1=-3$.

例 3 在等差数列$\{a_n\}$中，已知第 1 项到第 10 项的和为 310，第 11 项到第 20 项的和为 910，求第 21 项到第 30 项的和.

解 设等差数列的前 n 项和为 S_n，公差为 d. 由题意得

$$\begin{cases}S_{10}=310,\\ S_{20}-S_{10}=910,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}10a_1+\dfrac{10\times 9}{2}d=310,\\[2ex] 20a_1+\dfrac{20\times 19}{2}d-310=910,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a_1=4,\\ d=6.\end{cases}$$

所以 $a_{21}=4+20\times 6=124$，于是

$$a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30}=10\times 124+\frac{10\times 9}{2}\times 6=1\,510,$$

即第 21 项到第 30 项的和为 1 510.

练　习

1. 某商店的售货员想在货架上用三角形排列方式展示一种罐头饮料，底层放置 15 个罐头，第 2 层放置 14 个罐头，第 3 层放置 13 个罐头……顶层放置 1 个罐头，这样的摆法需要多少个罐头？
2. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.
   (1) 已知 $a_1=7$，$a_{10}=-43$，求 S_{10}；
   (2) 已知 $a_1=100$，公差 $d=-2$，求 S_{50}.
3. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.
   (1) 已知 $a_1=1$，公差 $d=2$，$n=15$，求 a_n 和 S_n；
   (2) 已知 $a_1=-13$，公差 $d=2$，$a_n=7$，求 n 和 S_n；
   (3) 已知 $a_1=8$，$n=5$，$a_n=\frac{1}{2}$，求公差 d 和 S_n；
   (4) 已知 $a_n=2$，$n=12$，$S_n=90$，求 a_1 和公差 d.
4. 在等差数列$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，…中，
   (1) 求前 20 项的和；
   (2) 已知前 n 项的和为$\frac{155}{2}$，求 n 的值.
5. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.
   (1) 已知 $a_{15}=-10$，公差 $d=2$，求 S_{20}；
   (2) 已知 $a_5=8$，$a_9=24$，求 a_n 和 S_n；
   (3) 已知 $a_5=8$，求 S_9.
6. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_8=100$，$S_{16}=392$，试求 S_{24}.

例 4　某剧场有 20 排座位，后一排比前一排多 2 个座位，最后一排有 60 个座位，这个剧场共有多少个座位？

解　这个剧场各排的座位数组成等差数列$\{a_n\}$，其中公差 $d=2$，项数 $n=20$，且第 20 项是 $a_{20}=60$.

由等差数列的通项公式，得

$$60=a_1+(20-1)\times 2,$$

所以

$$a_1=22.$$

由等差数列的求和公式，得

$$S_{20}=\frac{20\times(22+60)}{2}=820.$$

答　这个剧场共有 820 个座位.

例 5 某种卷筒卫生纸绕在盘上，空盘时盘芯直径为 40 mm，满盘时直径为 120 mm(图 4－2－4). 已知卫生纸的厚度为 0.1 mm，问：满盘时卫生纸的总长度大约是多少米(精确到 1 m)?

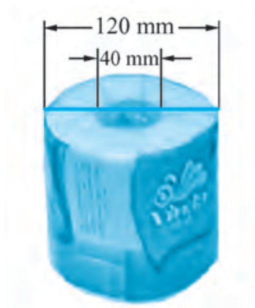


图 4－2－4

解 卫生纸的厚度为 0.1 mm，可以把绕在盘上的卫生纸近似地看作一组同心圆，然后分别计算各圆的周长，再求总和.

由内向外各圈的半径分别为

$$20.05,\ 20.15,\ \cdots,\ 59.95.$$

各圈的半径为该层纸的中心线至盘芯中心的距离.

因此，各圈的周长分别为

$$40.1\pi,\ 40.3\pi,\ \cdots,\ 119.9\pi.$$

因为各圈半径组成首项为 20.05，公差为 0.1 的等差数列，设圈数为 n，则

$$59.95 = 20.05 + (n-1)\times 0.1,$$

解得 $n = 400$.

显然，各圈的周长组成一个首项为 40.1π，公差为 0.2π，项数为 400 的等差数列. 根据等差数列的求和公式，得

$$S = 400\times 40.1\pi + \frac{400\times(400-1)}{2}\times 0.2\pi$$

$$= 32\,000\pi(\text{mm}).$$

$$32\,000\pi(\text{mm}) \approx 100(\text{m}).$$

答 满盘时卫生纸的长度约为 100 m.

例 6 某零存整取 3 年期储蓄的月利率为 2.7‰.

(1) 如果每月存入 1 000 元，那么 3 年后本息合计为多少元(精确到 1 元)?

(2) 欲在 3 年后一次性支取本息合计 5 万元，每月存入多少元(精确到 1 元)?

存款是按月存的，3 年存 36 次，最后一次有一个月的利息.

解 (1) 3 年后的本息和为

$$1\,000(1+2.7‰)+1\,000(1+2\times2.7‰)+\cdots+1\,000(1+36\times2.7‰)$$
$$=1\,000\left(36+36\times2.7‰+\frac{36\times35}{2}\times2.7‰\right)$$
$$\approx 37\,798(元).$$

(2) 设每月存 A 元，则有

$$A(1+2.7‰)+A(1+2\times2.7‰)+\cdots+A(1+36\times2.7‰)=50\,000.$$

利用等差数列的求和公式，得

$$A\left(36+36\times2.7‰+\frac{36\times35}{2}\times2.7‰\right)=50\,000,$$

解得 $$A\approx1\,323.$$

答 零存整取 3 年期储蓄每月存入 1 000 元，3 年后本息合计约 37 798 元. 欲在 3 年后一次性支取本息 5 万元，每月存入约 1 323 元.

练 习

1. 为了参加学校的长跑比赛，某同学制定了一个 12 天的训练计划：第一天跑 2 000 m，以后每天比前一天多跑 250 m. 这个同学在这 12 天中一共跑了多少米？
2. 求集合 $\{m \mid m=2n-1,\ n\in\mathbf{N}^*,且\ m<60\}$ 的元素个数，并求这些元素的和.
3. 一个多边形的周长等于 158 cm，所有各边的长成等差数列，最大边的长等于 44 cm，公差等于 3 cm，求该多边形的边数.
4. 已知一个凸多边形各个内角的度数组成公差为 5° 的等差数列，且最小角为 120°，则它是几边形？
5. 某钢材库新到 200 根相同的圆钢，要把它们堆放成正三角形垛(如图)，并使剩余的圆钢尽可能地少，那么将剩余多少根圆钢？

(第 5 题)

习题 4.2(2)

感受 · 理解

1. 求下列等差数列的各项的和：

(1) 1, 5, 9, …, 401;

(2) $-3,\ -\frac{3}{2},\ 0,\ \cdots,\ 30$;

(3) 0.7, 2.7, 4.7, …, 56.7;

(4) −10, −9.9, −9.8, …, −0.1.

$\sum$ 为求和符号. 例如 $\sum_{k=1}^{10} k = 1 + 2 + \cdots + 10$.

2. 求和:

(1) $\sum_{k=0}^{10}(3+0.25k)$;

(2) $\sum_{n=0}^{20}(1-2n)$.

3. 已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式,求它的前 n 项和 S_n.

(1) $a_n = 2n+1$; (2) $a_n = 3n-1$;

(3) $a_n = 9-4n$; (4) $a_n = \frac{11}{2} - \frac{1}{2}n$.

4. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.

(1) 已知 $a_1 = 20$, $a_n = 54$, $S_n = 999$,求 d 及 n;

(2) 已知 $d = \frac{1}{3}$, $n = 37$, $S_n = 629$,求 a_1 及 a_n;

(3) 已知 $a_1 = \frac{5}{6}$, $d = -\frac{1}{6}$, $S_n = -5$,求 n 及 a_n;

(4) 已知 $d=2$, $n=15$, $a_n=-10$,求 a_1 及 S_n.

5. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.

(1) 已知 $a_6 = 10$, $S_5 = 5$,求 S_8;

(2) 已知 $S_4 = 2$, $S_9 = -6$,求 S_{12};

(3) 已知 $a_2 + a_4 + a_6 = -3$, $a_3 + a_5 + a_7 = 6$,求 S_{20};

(4) 已知 $S_3 = 6$, $S_6 = -8$,求 S_9.

6. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n. 已知 $d = 2$, $S_{20} = 400$.

(1) 求 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19}$;

(2) 求 $a_2 + a_5 + a_8 + \cdots + a_{20}$.

7. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.

(1) 已知 $a_4 + a_{14} = 1$,求 S_{17};

(2) 已知 $a_{11} = 20$,求 S_{21};

(3) 已知 $S_{11} = 66$, 求 a_6;

(4) 已知 $S_4=2$, $S_8=6$,求 S_{16}.

8. 一个等差数列的前 12 项和为 354,前 12 项中,偶数项的和与奇数项的和之比为 32∶27,求公差 d.

思考·运用

9. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n = 5n^2 + 3n$,写出这个数列的前 3 项,并求它的通项公式.

10. 一个物体从 1 960 m 的高空落下,如果该物体第 1 s 降落 4.90 m,以后每秒比前一秒多降落 9.80 m,那么经过几秒钟才能落到地面?

11. 在等差数列$\{a_n\}$中,已知 $a_1 = -3$, $11a_5 = 5a_8$,求该数列前 n 项和 S_n 的最小值.

探究·拓展

12. 如果等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,那么 S_{10}, $S_{20}-S_{10}$, $S_{30}-S_{20}$ 是否成等差数列? 你能得到更一般的结论吗?

13. 观察：

$$
\begin{gathered}
1 \\
1+2+1 \\
1+2+3+2+1 \\
1+2+3+4+3+2+1 \\
\cdots
\end{gathered}
$$

（1）第 100 行是多少个数的和？和是多少？

（2）计算第 n 行的值.

14. （写作题）请查阅“杨辉三角”、《四元玉鉴》等资料，收集我国古代的数列研究成果，撰写小论文，论述我国古代数学家对人类文明的贡献，感悟我国古代数学的辉煌成就.

4.3 等比数列

回顾本章 4.1 节开始我们遇到的数列③④，再考察下面的问题：

放射性物质以一定的速度衰变，该速度正比于当时该物质的质量. 如果某个质量为 Q_0 的放射性物质经过时间 h 后衰变到质量 $\frac{Q_0}{2}$，那么称 h 为物质的半衰期. 镭的半衰期是 1 620 年，如果从现有的 10 g 镭开始，那么每隔 1 620 年，剩余量依次为

$$10,\ 10\times\frac{1}{2},\ 10\times\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ 10\times\left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \cdots.$$

某轿车的售价约为 36 万元，年折旧率约为 10%(就是说这辆车每年减少它的价值的 10%)，那么该车从购买当年算起，逐年的价值依次为

$$36,\ 36\times0.9,\ 36\times0.9^2,\ 36\times0.9^3,\ \cdots.$$

某人年初投资 10 000 元，如果年收益率是 5%，那么按照复利，5 年内各年末的本利和依次为

$$10\,000\times1.05,\ 10\,000\times1.05^2,\ \cdots,\ 10\,000\times1.05^5.$$

复利的本利和公式是

本利和 = 本金 × (1 + 利率)^{存期}.

● 与等差数列相比，上面这些数列有什么共同的特点？

4.3.1 等比数列的概念

一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，那么这个数列就叫作**等比数列**(geometric progression)，这个常数叫作等比数列的**公比**(common ratio)，公比通常用字母 q 表示.

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，始终有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$.

思　考

你能再举出一些等比数列的例子吗？

例 1 判断下列数列是否为等比数列：

(1) 1, 1, 1, 1, 1;

(2) 0, 1, 2, 4, 8;

(3) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16}$.

解 (1) 所给数列是首项为 1，公比为 1 的等比数列.

(2) 因为 0 不能作除数，所以这个数列不是等比数列.

(3) 所给数列是首项为 1,公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列.

例 2 求出下列等比数列中的未知项:

(1) 2, a, 8;

(2) -4, b, c, $\frac{1}{2}$.

解 (1) 根据题意,得
$$\frac{a}{2}=\frac{8}{a},$$
所以
$$a=4 \text{ 或 } a=-4.$$

(2) 根据题意,得
$$\begin{cases}\dfrac{b}{-4}=\dfrac{c}{b},\\[2ex] \dfrac{\frac{1}{2}}{c}=\dfrac{c}{b},\end{cases}$$
解得
$$\begin{cases}b=2,\\ c=-1,\end{cases}$$
所以
$$b=2,\ c=-1.$$

例 3 (1) 在等比数列$\{a_n\}$中,是否有
$$a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}\ (n\geqslant 2)?$$

(2) 如果在数列$\{a_n\}$中,对于任意的正整数 $n(n\geqslant 2)$,都有
$$a_n^2=a_{n-1}a_{n+1},$$
那么数列$\{a_n\}$一定是等比数列吗?

解 (1) 因为$\{a_n\}$是等比数列,所以
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_{n-1}},$$
即
$$a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}\ (n\geqslant 2)$$
成立.

(2) 不一定. 例如,对于数列
$$0,\ 0,\ 0,\ \cdots,$$
总有 $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}$,但这个数列不是等比数列.

练 习

1. 判断下列数列是否为等比数列:

(1) 1, 2, 1, 2, 1;

(2) -2, -2, -2, -2;

(3) 1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $-\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$;

(4) 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 0;

(5) lg 3, lg 6, lg 12;

(6) 1, -1, 1, -1.

2. 从下面的表中，请你用彩笔涂出 3 个等比数列，满足以下要求：

(1) 每个数列的项所在的框是相连接的(顶点相连或者边相连)；

(2) 三个数列的公比是不同的.

1	2	2^2	2^3	2^4	2^5
2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}

3. 已知下列数列是等比数列，试在括号内填上适当的数：

(1) ( )，3，27；　　(2) 3，( )，5；

(3) 1，( )，( )，$\frac{81}{8}$.

4. 已知数列$\{a_n\}$是等比数列.

(1) 如果 $a_2=2$，$a_3=-6$，求公比 q 和 a_1；

(2) 如果 $a_1=3$，$a_2=6$，求公比 q 和 a_5.

5. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式，判断它是否为等比数列.

(1) $a_n=3^n$；　　(2) $a_n=4\times 2^{3n-1}$；

(3) $a_n=(-3)^{-n}$；　　(4) $a_n=0$.

6. 若 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 是公比为 q 的等比数列，则数列 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1$ 也是等比数列吗？如果是，公比是多少？

4.3.2 等比数列的通项公式

设$\{a_n\}$是首项为 2，公比为 3 的等比数列，则

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 2\times 3,\\
a_3 &= 2\times 3\times 3 = 2\times 3^2,\\
a_4 &= 2\times 3^2\times 3 = 2\times 3^3,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

你能写出第 n 项 a_n 吗？

一般地，对于等比数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n，有

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

这就是等比数列$\{a_n\}$的通项公式，其中 a_1 为首项，q 为公比.

证明　因为$\{a_n\}$是等比数列，所以当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$\frac{a_2}{a_1}=q,\ \frac{a_3}{a_2}=q,\ \frac{a_4}{a_3}=q,\ \cdots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=q.$$

将上面 $n-1$ 个等式的左右两边分别相乘，得

$$\frac{a_n}{a_1}=q^{n-1},$$

所以 $$a_n=a_1q^{n-1}.$$

当 $n=1$ 时，上面的等式也成立.

例 4 在等比数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_1=3$，$q=-2$，求 a_6；

(2) 已知 $a_3=20$，$a_6=160$，求 a_n.

解 (1) 由等比数列的通项公式，得

$$a_6=3\times(-2)^{6-1}=-96.$$

(2) 设等比数列的公比为 q，那么

$$\begin{cases}a_1q^2=20,\\a_1q^5=160,\end{cases}$$

解得 $$\begin{cases}q=2,\\a_1=5.\end{cases}$$

所以 $$a_n=a_1q^{n-1}=5\times 2^{n-1}.$$

例 5 在 243 和 3 中间插入 3 个数，使这 5 个数成等比数列.

解 设插入的 3 个数为 a_2，a_3，a_4. 由题意得

$$243,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ 3$$

成等比数列.

设公比为 q，则 $$3=243q^{5-1},$$

解得 $$q=\pm\frac{1}{3}.$$

因此，所求 3 个数为 81，27，9 或-81，27，-9.

例 6 已知等比数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3\times 2^{n-3}$，求首项 a_1 和公比 q.

解 $$a_1=3\times 2^{1-3}=\frac{3}{4},$$

$$a_2=3\times 2^{2-3}=\frac{3}{2},$$

所以 $$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}}=2.$$

或 $q=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3\times 2^{n-2}}{3\times 2^{n-3}}=2.$

在例6中,等比数列的通项公式

$$a_n=\frac{3}{8}\times 2^n$$

是一个常数与指数式的乘积.从图象上看(图4-3-1),表示这个数列的各点(n,a_n)均在函数$y=\frac{3}{8}\times 2^x$的图象上.

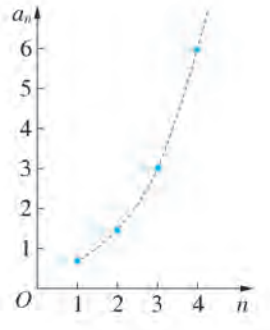


图4-3-1

思 考

如果一个数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=aq^n$,其中a,q都是不为0的常数,那么这个数列一定是等比数列吗?

练 习

1. 求下列等比数列的公比、第5项和第n项:

(1) 2, 6, 18, 54, …;　　(2) 7, $\frac{14}{3}$, $\frac{28}{9}$, $\frac{56}{27}$, …;

(3) 0.3, −0.09, 0.027, −0.0081, …;　　(4) 5, 5^{c+1}, 5^{2c+1}, 5^{3c+1}, ….

2. 已知等比数列的公比为$\frac{2}{5}$,第4项是$\frac{5}{2}$,求前三项.

3. 在等比数列$\{a_n\}$中,

(1) 已知$a_1=-3$,$q=2$,$n=5$,求a_n;

(2) 已知$a_1=1$,$q=2$,$a_n=16$,求n;

(3) 已知$a_1=\frac{1}{3}$,$n=6$,$a_n=9$,求q;

(4) 已知$q=-\frac{3}{2}$,$n=4$,$a_n=-27$,求a_1.

4. 在等比数列$\{a_n\}$中,

(1) 已知$a_5=8$,$a_8=1$,求a_1和q;

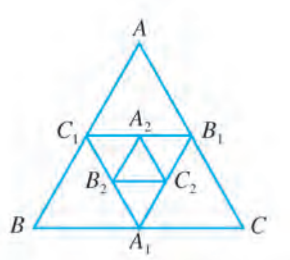
(2) 已知$a_3=2$,$q=-1$,求a_{15};

(3) 已知$a_4=12$,$a_8=6$,求a_{12}.

5. 三个数成等比数列,它们的积等于8,它们的和等于−3,求这三个数.

6. 如图,在边长为1的等边三角形ABC中,连接各边中点得$\triangle A_1B_1C_1$,再连接$\triangle A_1B_1C_1$的各边中点得$\triangle A_2B_2C_2$……如此继续下去,试证明数列$S_{\triangle ABC}$,$S_{\triangle A_1B_1C_1}$,$S_{\triangle A_2B_2C_2}$,…是等比数列.

7. 在本章4.3节的关于轿车折旧的问题中,大约在购车后的第几年,该辆车的价值只有原来的一半?



(第6题)

习题 4.3(1)

感受·理解

1. 判断下列数列是否为等比数列：

(1) 9，0.9，0.09，0.009；

(2) 7^2，7^{-1}，7^{-4}，7^{-7}；

(3) 2×3^2，$2^3\times3^5$，$2^5\times3^8$，$2^7\times3^{11}$；

(4) $3+5^2$，3^2+5^4，3^3+5^6，3^4+5^8.

2. 已知$\{a_n\}$是等比数列，在下表中填入适当的数：

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-1	3			
2			$4\sqrt{2}$	
		$\frac{1}{3}$		9

3. 在等比数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_4=27$，$q=-3$，求 a_7；

(2) 已知 $a_2=18$，$a_4=8$，求 a_1 和 q；

(3) 已知 $a_5=4$，$a_7=6$，求 a_9；

(4) 已知 $a_5-a_1=15$，$a_4-a_2=6$，求 a_3.

4. 在等比数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_4=4$，$a_9=972$，求 a_n；

(2) 已知 $a_2=-6$，$a_6=-\frac{32}{27}$，求 a_n.

5. 在两个非零实数 a 和 b 之间插入 2 个数，使它们成等比数列，试用 a，b 表示这个等比数列的公比.

6. 已知公差不为 0 的等差数列的第 2，3，6 项依次构成一个等比数列，求该等比数列的公比.

7. 某地为防止水土流失，实行退耕还林. 如果计划第一年(今年)退耕 10 万公顷，以后每年增加 10%，那么第 7 年须退耕多少公顷(精确到 1 公顷)?

8. 已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，公比为 q，求证：$\{\sqrt{a_n}\}$是等比数列，并求该数列的公比.

9. 在等比数列$\{a_n\}$中，如果对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n>0$，求证：数列$\{\lg a_n\}$为等差数列.

10. 在等比数列$\{a_n\}$中，

(1) $a_5^2=a_1a_9$ 是否成立? $a_5^2=a_3a_7$ 是否成立?

(2) $a_n^2=a_{n-2}a_{n+2}(n>2)$ 是否成立?

(3) 你能得到更一般的结论吗?

11. 若 a，G，b 成等比数列，则称 G 为 a 和 b 的**等比中项**.

(1) 求 45 和 80 的等比中项；

(2) 已知两个数 $k+9$ 和 $6-k$ 的等比中项是 $2k$，求 k.

12. 已知无穷等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比为q.

(1) 依次取出数列$\{a_n\}$中的所有奇数项，组成一个新数列，这个新数列是等比数列吗？如果是，求出它的首项和公比；

(2) 数列$\{ca_n\}$（其中常数$c \neq 0$）是等比数列吗？如果是，求出它的首项和公比.

思考・运用

13. 三个数成等比数列，它们的积等于27，它们的平方和等于91，求这三个数.

14. 已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q = 2$，且$a_1a_2a_3\cdots a_{30} = 2^{30}$，求$a_3a_6a_9\cdots a_{30}$的值.

15. 某地现有耕地10 000公顷，规划10年后粮食单产比现在增加22%，人均粮食占有量比现在提高10%. 如果人口年增长率为1%，那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷（精确到1公顷）？

（注：粮食单产 $= \dfrac{\text{总产量}}{\text{耕地面积}}$，人均粮食占有量 $= \dfrac{\text{总产量}}{\text{总人口数}}$）

探究・拓展

16. 对任意的等差数列$\{a_n\}$，计算$a_1 + a_2$，$a_3 + a_4$，$a_5 + a_6$，$a_7 + a_8$，…，你发现了什么一般规律？能将发现的规律推广吗？在等比数列中有怎样类似的结论？

17. 如图，将一个边长为1的正三角形的每条边三等分，以中间一段为边向形外作正三角形，并擦去中间一段，得图(2). 如此继续下去，得图(3)……试探求第n个图形的边长和周长.

这样形成的图形称为分形(fractal).

（第17题）

4.3.3 等比数列的前 n 项和

已知等比数列$\{a_n\}$的第1项a_1和公比q，如何求出它的前n项和S_n？

根据等比数列的通项公式，这个等比数列就是

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ \cdots,\ a_1q^{n-1},\ \cdots,$$

所以它的前n项和是

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}. \quad ①$$

① 式等号右边的每一项是它前一项的q倍，根据这个特点，在上式两边同乘以q，得

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^n. \quad ②$$

①－②，得

$$(1-q)S_n = a_1 - a_1q^n.$$

所以，当 $q \neq 1$ 时，

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\ (q \neq 1).$$

根据等比数列的通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1}$，又可得到

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}\ (q \neq 1).$$

显然，当 $q = 1$ 时，$S_n = na_1$.

例 1 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) 已知 $a_1 = -4$，公比 $q = \frac{1}{2}$，求前 10 项和 S_{10}；

(2) 已知 $a_1 = 1$，$a_k = 243$，$q = 3$，求前 k 项和 S_k.

解 (1) 根据等比数列的前 n 项和公式，得

$$S_{10} = \frac{-4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1\,023}{128}.$$

(2) 根据等比数列的前 n 项和公式，得

$$S_k = \frac{1-243\times 3}{1-3} = 364.$$

例 2 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_3 = \frac{7}{2}$，$S_6 = \frac{63}{2}$，求 a_n.

解 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

若 $q = 1$，则 $S_6 = 2S_3$，这与已知 $S_3 = \frac{7}{2}$，$S_6 = \frac{63}{2}$ 是矛盾的，所以 $q \neq 1$. 从而

$$S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = \frac{7}{2},$$

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{63}{2}.$$

在等比数列的通项公式与前 n 项和公式中，共含有 a_1，q，n，a_n，S_n 五个量，只要已知其中的三个量，就可以求出其余的两个量.

将上面两个等式的两边分别相除，得

$$1+q^3 = 9,$$

解得 $q = 2$，由此可得 $a_1 = \frac{1}{2}$. 因此

$$a_n = \frac{1}{2}\times 2^{n-1} = 2^{n-2}.$$

例 3 求数列 $1+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{4}, 3+\frac{1}{8}, \cdots, n+\frac{1}{2^n}, \cdots$ 的前 n 项和 S_n.

分析 这个数列的每一项都是一个等差数列与一个等比数列的对应项的和,因此可以分组求和.

解

$$S_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{1}{4}\right)+\left(3+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(n+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=(1+2+3+\cdots+n)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{n(n+1)}{2}+1-\frac{1}{2^n}.$$

练 习

1. 某厂去年的产值记为 1,若计划在今后五年内每年的产值比上年增长 10%,则从今年起到第五年,这个厂的总产值为(　　).
   A. 1.1^4　　B. 1.1^5
   C. $11\times(1.1^5-1)$　　D. $10\times(1.1^6-1)$
2. 求下列等比数列的各项和:
   (1) $1, 3, 9, \cdots, 2\,187$;　　(2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \cdots, -\frac{1}{512}$.
3. 根据下列条件,求等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n:
   (1) $a_1=3, q=2, n=6$;　　(2) $a_1=-1, q=-\frac{1}{3}, n=5$;
   (3) $a_1=8, q=\frac{1}{2}, a_n=\frac{1}{2}$;　　(4) $a_2=0.12, a_5=0.000\,96, n=4$.
4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,
   (1) 已知 $a_1=16, n=6, a_n=\frac{1}{2}$,求 q 和 S_n;
   (2) 已知 $a_1=2, n=3, S_n=14$,求 q 和 a_n;
   (3) 已知 $q=\frac{1}{2}, n=6, S_n=\frac{189}{4}$,求 a_1 和 a_n;
   (4) 已知 $a_1=1, a_n=81, S_n=121$, 求 q 和 n.
5. 求和: $\sum_{k=1}^{10}(3+2^k)$.

例 4 为了恢复生态,某地决定从今年开始逐步将 6 370 万亩耕地退耕还林,计划今年退耕土地面积为 515 万亩,以后每年退耕土地面积比上一年递增 12%,那么经过 6 年该地区退耕还林的面积共有多少万亩(精确到万亩)?

解 根据题意,每年退耕还林的面积比上一年增长的百分比相同,所以从今年起,每年退耕还林的面积(单位: 万亩)组成一个等比数列 $\{a_n\}$,其中

$$a_1=515,\ q=1+12\%=1.12,\ n=6,$$

则

$$S_6=\frac{515\times(1-1.12^6)}{1-1.12}\approx 4\,179(\text{万亩}).$$

答 经过 6 年该地区退耕还林的面积共有约 4 179 万亩.

思 考

例 4 中,该地区要经过多少年才能基本解决退耕还林问题?

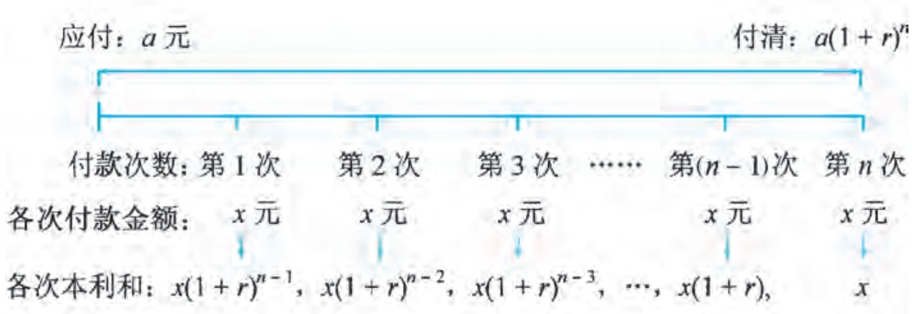
例 5 某人今年初向银行申请贷款 20 万元,月利率为 3.375‰,按复利计算,每月等额还贷一次,并从贷款后的次月初开始还贷. 如果 10 年还清,那么每月应还贷多少元?

分析 对于分期付款,银行有如下规定:

(1) 分期付款为复利计息,每期付款数相同,且在期末付款;

(2) 到最后一次付款时,各期所付的款额的本利之和等于商品售价的本利之和.

为解决上述问题,我们先考察一般情形. 设某商品一次性付款的金额为 a 元,以分期付款的形式等额地分成 n 次付清,每期期末所付款是 x 元,期利率为 r,则分期付款方式可表示为:



从而有

$$x[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-3}+\cdots+(1+r)+1]$$
$$=a(1+r)^n.$$

运用等比数列求和公式,化简得

$$x=\frac{ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

这就是分期付款的数学模型.

解 设每月应还贷 x 元,共付款 $12\times10=120$ 次,则有

$$x[1+(1+0.003\,375)+(1+0.003\,375)^2+\cdots+(1+0.003\,375)^{119}]=200\,000(1+0.003\,375)^{120},$$

化简得

使用 Excel 中的财务函数,可以方便地求出每期的付款额.

$$x=\frac{200\,000\times 0.003\,375\times(1+0.003\,375)^{120}}{(1+0.003\,375)^{120}-1}$$
$$\approx 2\,029.66(\text{元}).$$

答　每月应还贷款 2 029.66 元.

练　习

1. 某市近 8 年的生产总值第一年为 1 000 亿元,从第二年开始以 10%的速度增长,那么这个城市近 8 年的生产总值一共是多少亿元(精确到 0.01 亿元)?
2. 回答我国古代用诗歌形式提出的一个数列问题:

　　远望巍巍塔七层,红灯向下成倍增,
　　共灯三百八十一,试问塔顶几盏灯?

3. 一个球从 32 m 的高处自由落下,每次着地后又跳回到原来高度的一半. 当它第 5 次着地时,共经过的路程是多少?
4. 顾客采用分期付款的方式购买一件 5 000 元的商品,在购买一个月后第一次付款,且每月等额付款一次,在购买后的第 12 个月将货款全部付清,月利率为 0.5%. 按复利计算,该顾客每月应付款多少元(精确到 1 元)?

链　接

现值与终值

“现值”与“终值”是利息计算中的两个基本概念,掌握好这两个概念,对于顺利解决有关金融中的数学问题以及理解各种不同的算法都是十分有益的.

所谓“现值”是指在 n 期末的金额,把它扣除利息后,折合成现时的值. 而“终值”是指 n 期后的本利和. 它们计算的基点分别是存期的起点和终点.

例如,在复利计息的情况下,设本金为 A,每期利率为 r,期数为 n,到期末的本利和为 S,则

$$S=A(1+r)^n,$$

其中,S 称为 n 期末的终值,A 称为 n 期后终值 S 的现值,即 n 期后的 S 元现在的价值为

$$A=\frac{S}{(1+r)^n}.$$

例　某厂为试制新产品,需增加某些设备. 若购置这些设备,需一次付款 25 万元;若租赁这些设备,每年初付租金 3.3 万元. 已知一年期存款的年利率为 2.55%,试讨论哪种方案更好(设备的寿命为 10 年).

解法 1　(从终值来考虑)若购置设备,则 25 万元 10 年后的价值为

$$25(1+2.55\%)^{10}\approx 32.159(\text{万元}).$$

若租赁设备,每年初付租金 3.3 万元,10 年后的总价值为

$$S=3.3(1+2.55\%)^{10}+3.3(1+2.55\%)^{9}+\cdots+3.3(1+2.55\%)\approx 38.00(万元).$$

因此，购买设备较好.

解法 2 （从现值来考虑）每年初付租金 3.3 万元的 10 年现值之和为

$$Q=3.3+\frac{3.3}{1+2.55\%}+\frac{3.3}{(1+2.55\%)^{2}}+\cdots+\frac{3.3}{(1+2.55\%)^{9}}\approx 29.54(万元),$$

比购置设备一次付款 25 万元多，故购置设备的方案较好.

信息技术

● EXCEL

Excel 提供了丰富的财务函数，利用这些函数我们能够轻松地完成有关投资或贷款等问题的计算. 下面介绍常用的几个函数.

（1）PMT 函数，在固定利率的等额分期付款方式中，计算投资或贷款的每期付款额.

对于例 5，只需在 Excel 单元格中输入“=PMT(0.337 5%，12 * 10，200 000)”，即可得到 $x\approx 2\,029.66$ 元，函数 PMT 的含义见图 4-3-2.

type的默认值为0，表示各期结算时间在期末. 若结算时间在期初，则其值为 1.

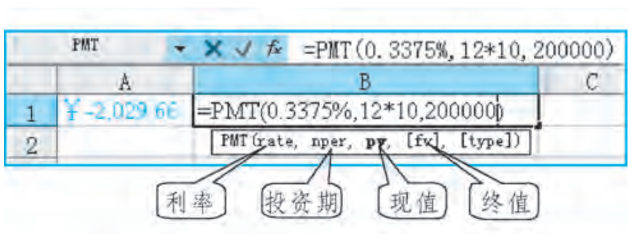


图 4-3-2

（2）FV 函数，在固定利率的等额分期付款方式中，计算某项投资的终值.

如在上面“链接”的例题中，可用“= FV(2.55%，10，3.3， ，1)”计算得 $S\approx 38.00$（图 4-3-3），FV(rate，nper，pmt，[pv]，[type]) 中参数的含义同上.

单元格中的负值表示支出.

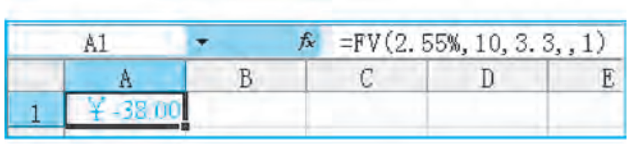


图 4-3-3

（3）PV 函数，计算一系列未来付款的现值累积和. 如在上面“链接”中，可用“= PV(2.55%，10，3.3， ，1)”计算得 $Q\approx 29.54$（图 4-3-4）. PV(rate，nper，pmt，[fv]，[type]) 中参数的含义同上.

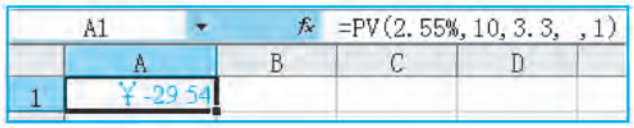


图 4-3-4

如果你在实际生活中还需要使用其他一些财务函数，可以查看 Excel 帮助文档中的相关资料.

● GGB

在 GGB 中，与 Excel 类似，可用“每期付款额[ ]”“未来值[ ]”“现值[ ]”等函数处理财务问题.

例如，对于例 5，在输入框中输入“每期付款额[0.337 5%, 12 * 10, 200 000]”，即可得到 $x \approx 2\ 029.66$ 元.

在“链接”的例题中，可用“未来值[2.55%, 10, 3.3, 0, 1]”计算得 $S \approx 38.00$；用“现值[2.55%, 10, 3.3, 0, 1]”计算得 $Q \approx 29.54$（图 4-3-5）.

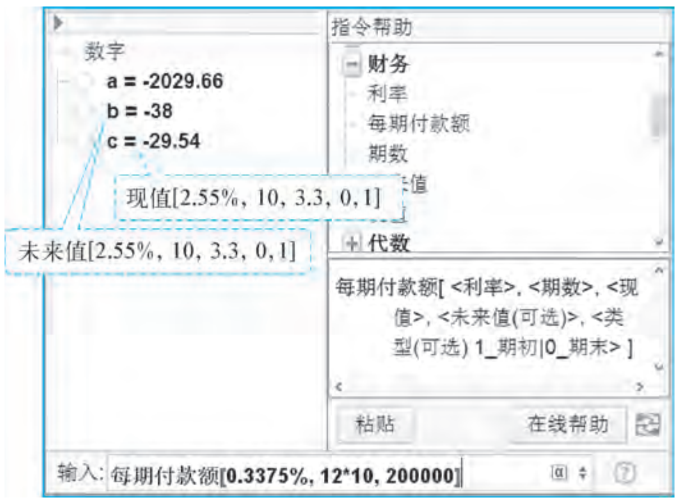


图 4-3-5

习题 4.3(2)

感受 · 理解

1. 求下列等比数列的前 n 项和：

(1) $1, -1, 1, -1, \cdots$；

(2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$.

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) 已知 $a_1 = 2, q = -\frac{1}{2}$，求 S_{10}；

(2) 已知 $a_1 = \frac{1}{27}, a_8 = 81$，求 S_8；

(3) 已知 $a_n = 4 \times 3^{1-n}$，求 S_n.

3. 在等比数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_1=-1.5$，$a_7=-96$，求 q 和 S_n；

(2) 已知 $q=\frac{1}{2}$，$S_5=-\frac{31}{8}$，求 a_1 和 a_n；

(3) 已知 $a_1=2$，$S_3=26$，求 q 和 a_n.

4. 设$\{a_n\}$是公比为正数的等比数列，$a_1=2$，$a_3=a_2+4$，求数列$\{a_n\}$的前n项和 S_n.

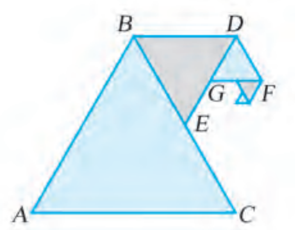
5. 求和：

(1) $\left(2+\frac{1}{3}\right)+\left(4+\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(2n+\frac{1}{3^n}\right)$；

(2) $(a-1)+(a^2-2)+\cdots+(a^n-n)$.

6. 某林场去年底森林木材储存量为 330 万 m^3. 若树木以每年 25%的增长率生长，计划从今年起，每年底要砍伐的木材量为 x 万 m^3. 为了实现经过 20 年木材储存量翻两番的目标，每年砍伐的木材量 x 的最大值是多少(精确到 0.01 万 m^3)?

7. 如图，正三角形 ABC 的边长为 20 cm，取 BC 边的中点 E，作正三角形 BDE；取 DE 边的中点 G，作正三角形 DFG……如此继续下去，可得到一列三角形$\triangle ABC$，$\triangle BDE$，$\triangle DFG$，…，求前 20 个正三角形的面积和.



(第 7 题)

8. 在等比数列$\{a_n\}$中，$q=\frac{1}{2}$，$S_{100}=150$，求 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100}$ 的值.

思考 · 运用

9. 在等比数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1+a_n=66$，$a_2a_{n-1}=128$，$S_n=126$，求 n，q.

10. 设 S_n 是等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，S_3，S_9，S_6 成等差数列，求证：a_2，a_8，a_5 成等差数列.

11. 据测算，如果不加处理，每吨工业废弃垃圾将占地 1 m^2. 环保部门每回收或处理 1 t 废旧物资，相当于消灭 4 t 工业废弃垃圾. 如果某环保部门从去年开始回收处理废旧物资，第 1 年共回收处理了 10^4 t 废旧物资，且以后每年的回收量比上一年递增 20%.

(1) 第 7 年能回收多少吨废旧物资?(结果用科学记数法表示，保留一位小数)

(2) 前 7 年共节约土地多少平方米?(结果用科学记数法表示，保留一位小数)

探究 · 拓展

12. 求和：$\frac{1}{2}+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

13. 求和：$S_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$.

4.4 数学归纳法*

我们已经用归纳法得到许多结论，例如，等差数列$\{a_n\}$的通项公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d;$$

等比数列的通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

这些命题都与正整数有关.正整数有无限多个，我们无法对所有的正整数逐一验证，那么，

● 对于一个与正整数有关的命题，我们怎样证明这个命题对所有的正整数都成立呢?

有一种多米诺骨牌游戏，在一个平面上摆一排骨牌(每块骨牌都竖起)，假定这排骨牌有无数块，我们要使所有的骨牌都倒下，只要做两件事就行了.第一，使第一块骨牌倒下；第二，保证前一块骨牌倒下后一定能击倒下一块骨牌.

一般地，证明一个与正整数n有关的数学命题，可按如下两个步骤进行：

(1) 证明当$n=n_0$($n_0\in \mathbf{N}^*$)时命题成立；

(2) 假设当$n=k$ ($k\geqslant n_0$, $k\in \mathbf{N}^*$)时命题成立，证明当$n=k+1$时命题也成立.

根据(1)(2)就可以断定命题对于从n_0开始的所有正整数n都成立.

上述证明方法叫作**数学归纳法**(mathematical induction).

数学归纳法是证明与正整数有关的命题的常用方法.

例 1 用数学归纳法证明：若等差数列$\{a_n\}$中，a_1为首项，d为公差，则通项公式为

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \quad ①$$

证明 (1) 当$n=1$时，等式左边$=a_1$，等式右边$=a_1+0\times d=a_1$，等式①成立.

(2) 假设当$n=k$时等式①成立，即

---

* 本节为选学内容.

$$a_k = a_1 + (k-1)d,$$

那么，当 $n = k+1$ 时，有

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + [(k+1)-1]d.$$

这就是说，当 $n = k+1$ 时等式①也成立.

根据(1)和(2)可知，对任何 $n \in \mathbf{N}^*$，等式①都成立.

在上面的证明中，步骤(1)确认了当 $n=1$ 时等式成立，进而再根据步骤(2)，当 $n=1+1=2$ 时等式也成立. 再由于当 $n=2$ 时等式成立，根据步骤(2)，当 $n=2+1=3$ 时等式也成立. 这样递推下去，就知道当 $n=4, 5, 6, \cdots$ 时等式都成立，从而保证了命题对任何 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立. 由此可见，数学归纳法的步骤(1)是命题论证的基础，步骤(2)是判断命题的正确性能否递推下去的保证. 这两个步骤是缺一不可的.

例 2 用数学归纳法证明：当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时，

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2.$$

证明 (1) 当 $n=1$ 时，等式左边 $=1$，等式右边 $=1$，等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$1+3+5+\cdots+(2k-1) = k^2,$$

那么，当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]\\ =\ &k^2+[2(k+1)-1] = k^2+2k+1 = (k+1)^2.\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据(1)和(2)可知，对任何 $n \in \mathbf{N}^*$，等式都成立.

例 3 用数学归纳法证明：当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时，

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

证明 (1) 当 $n=1$ 时，$1^2=1$，$\dfrac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6}=1$，等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

那么，当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\=&\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}\\=&\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\=&\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.\end{aligned}$$

所以当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

根据(1)和(2)可知，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$，等式都成立.

思 考

在用数学归纳法解题时，为什么步骤(1)和步骤(2)两者缺一不可？

练 习

分析下列各题(1～2)的证明过程，找出其中的错误：

1. 设 $n\in\mathbf{N}^*$，求证：$2+4+6+\cdots+2n=n^2+n+1$.

证明：假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$2+4+6+\cdots+2k=k^2+k+1,$$

那么，当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}2+4+6+\cdots+2k+2(k+1)&=k^2+k+1+2(k+1)\\&=(k+1)^2+(k+1)+1.\end{aligned}$$

因此，对于任何 $n\in\mathbf{N}^*$，等式都成立.

2. 设 $n\in\mathbf{N}^*$，求证：$2^n>n^2$.

证明：(1) 当 $n=1$ 时，$2^1>1^2$，不等式显然成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时不等式成立，即 $2^k>k^2$，那么当 $n=k+1$ 时，有

$$2^{k+1}=2\times2^k=2^k+2^k>k^2+k^2\geqslant k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

根据(1)和(2)可知，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$，不等式总成立.

用数学归纳法证明下列各题(3～4)：

3. $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

4. 首项是 a_1，公比是 q 的等比数列的通项公式是 $a_n=a_1q^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

数学归纳法是一种重要的证明方法，应用十分广泛. 一般说来，与正整数有关的恒等式、不等式、数的整除性、数列的通项及前 n 项的和等问题，都可以考虑用数学归纳法证明.

例 4 设 $n\in\mathbf{N}^*$，$f(n)=5^n+2\times3^{n-1}+1$.

(1) 当 $n=1,2,3,4$ 时，计算 $f(n)$的值.

(2) 你对 $f(n)$的值有何猜想？用数学归纳法证明你的猜想.

解 (1) 当 $n=1$ 时，

$$f(1)=5^1+2\times3^{1-1}+1=8=8\times1;$$

当 $n=2$ 时，

$$f(2)=5^2+2\times3^{2-1}+1=32=8\times4;$$

当 $n=3$ 时，

$$f(3)=5^3+2\times3^{3-1}+1=144=8\times18;$$

当 $n=4$ 时，

$$f(4)=5^4+2\times3^{4-1}+1=680=8\times85.$$

(2) 猜想：当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$f(n)=5^n+2\times3^{n-1}+1$ 能被 8 整除.

① 当 $n=1$ 时，有

$$f(1)=5^1+2\times3^{1-1}+1=8,$$

能被 8 整除，命题成立.

② 假设当 $n=k$ 时命题成立，即 $f(k)$能被 8 整除，那么，当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}f(k+1)&=5^{k+1}+2\times3^{(k+1)-1}+1=5\times5^k+6\times3^{k-1}+1\\&=(5^k+2\times3^{k-1}+1)+4(5^k+3^{k-1})=f(k)+4(5^k+3^{k-1}).\end{aligned}$$

这里，5^k 和 3^{k-1} 均为奇数，它们的和(5^k+3^{k-1}) 必为偶数，从而 $4(5^k+3^{k-1})$ 能被 8 整除. 又依归纳假设，$f(k)$ 能被 8 整除，所以 $f(k+1)$ 能被 8 整除. 这就是说，当 $n=k+1$ 时 命题也成立.

根据①和②可知，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$，命题总成立.

例 5 在平面上画 n 条直线，且任何 2 条直线都相交，其中任何 3 条直线不共点. 问：这 n 条直线将平面分成多少个部分？

解 记 n 条直线把平面分成 r_n 个部分，我们通过 $n=1$，2，3，4，5，画出图形观察 r_n 的情况(图 4－4－1).

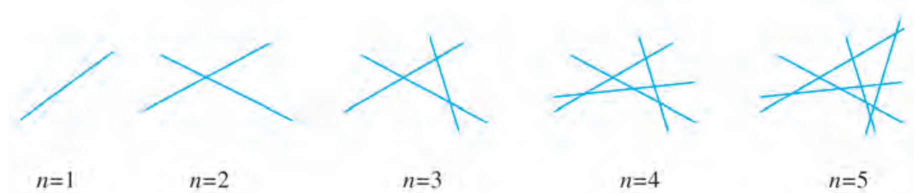


图 4－4－1

从图 4－4－1 中可以看出，

$$r_1=2=1+1,$$
$$r_2=4=r_1+2=1+1+2,$$
$$r_3=7=r_2+3=1+1+2+3,$$
$$r_4=11=r_3+4=1+1+2+3+4,$$
$$r_5=16=r_4+5=1+1+2+3+4+5.$$

由此猜想

$$r_n=1+1+2+3+4+\cdots+n.$$

接下来用数学归纳法证明这个猜想.

(1) 当 $n=1$，2 时，结论均成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时结论成立，即

$$r_k=1+1+2+3+4+\cdots+k.$$

那么，当 $n=k+1$ 时，第 $k+1$ 条直线与前面的 k 条直线都相交，有 k 个交点，这 k 个交点将这条直线分成 $k+1$ 段，且每一段将原有的平面部分分成两个部分，所以

$$r_{k+1}=r_k+(k+1)=1+1+2+3+4+\cdots+k+(k+1),$$

结论也成立.

根据(1)和(2)可知，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$，都有

$$r_n=1+1+2+3+4+\cdots+n,$$

即
$$r_n=1+\frac{n(n+1)}{2}.$$

练 习

先通过有关活动，提出猜想，再用数学归纳法证明你的猜想：

1. 求 $-1+3-5+\cdots+(-1)^n(2n-1)$ 的和.

2. $n^3+5n\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 能被哪些自然数整除？

3. 求凸 n 边形的对角线的条数 $f(n)$.

阅 读

小孩子的“发现”

我国著名数学家华罗庚曾经这样叙述小孩子“发现”数学归纳法的过程. 他说：

小孩子识数，先学会数 1 个、2 个、3 个；过些时候，能够数到 10 了；又过些时候，会数到 20，30，…，100 了. 但后来，却决不是这样一段一段地增长，而是飞跃前进. 到了某一个时候，他领悟了，他会说：“我什么数都会数了.”这一飞跃，竟从有限跃到了无限！怎样会的？首先，他知道从头数；其次，他知道一个一个按次序地数，而且不愁数了

华罗庚(1910—1985),江苏金坛人,我国著名数学家. 在解析数论、矩阵几何学、典型群、自守函数论与多元复变函数论等多方面有深入的研究.

一个以后,下一个不会数. 也就是他领悟了下一个数的表达方式可以由上一个数来决定. 于是,他也就会数任何一个数了.

华罗庚教授高度评价了小孩的发现,他说:

设想一下,如果这个飞跃现象不出现,那么人们一辈子就只能学数数了,而且人生有限,数目无穷,就是学了一辈子,也决不会学尽呢! 解释这个飞跃现象的原理,就是数学归纳法.

你能理解他的话吗? 很可能你小时候也有过似曾相识的经历,也曾发现过数学归纳法. 可是,你当时并没有意识到自己发现了数学,但是你今天应该能理解它.

习题 4.4

感受·理解

用数学归纳法证明下列各题(1~7):

1. $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})=1-x^n$.

2. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

3. 3 个连续自然数的立方和能被 9 整除.

4. 设 $x>0$,$n\in\mathbf{N}^*$,且 $n\geqslant 2$,求证:$(1+x)^n>1+nx$.

5. 平面内有 $n(n\geqslant 2)$ 条直线,其中任何 2 条不平行,任何 3 条不过同一点,求证:它们交点的个数为 $f(n)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

思考·运用

6. 设 $n\in\mathbf{N}^*$,求证:$f(n)=3^{2n+2}-8n-9$ 是 64 的倍数.

7. 设 $n\in\mathbf{N}^*$,$n>1$,求证:$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

8. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$,且 $4a_{n+1}-a_na_{n+1}+2a_n=9\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求 a_2,a_3,a_4;

(2) 由(1)猜想$\{a_n\}$的通项公式 a_n;

(3) 用数学归纳法证明(2)的结果.

探究·拓展

9. 将正整数作如下分组:(1),(2,3),(4,5,6),(7,8,9,10),(11,12,13,14,15),(16,17,18,19,20,21),…,分别计算各组包含的正整数的和如下,试猜测 $S_1+S_3+S_5+\cdots+S_{2n-1}$ 的结果,并用数学归纳法证明.

$$S_1=1,$$
$$S_2=2+3=5,$$
$$S_3=4+5+6=15,$$
$$S_4=7+8+9+10=34,$$
$$S_5=11+12+13+14+15=65,$$
$$S_6=16+17+18+19+20+21=111,$$
$$\cdots\cdots$$

问题与探究

数列的转化

若数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=5$，对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$，求a_n的表达式.

解 对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，因为

$$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n,$$

所以，存在λ，$q\in\mathbf{R}$，使得

$$a_{n+2}+\lambda a_{n+1}=q(a_{n+1}+\lambda a_n),$$

即

$$a_{n+2}=(q-\lambda)a_{n+1}+q\lambda a_n.$$

取$\begin{cases}q-\lambda=4,\\ q\lambda=-4,\end{cases}$解得$\begin{cases}q=2,\\ \lambda=-2.\end{cases}$

所以

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n).$$

又因为$a_1=1$，$a_2=5$，所以$a_2-2a_1=3\neq 0$，

所以$a_{n+1}-2a_n\neq 0$，从而$\dfrac{a_{n+2}-2a_{n+1}}{a_{n+1}-2a_n}=2$，

因此，数列$\{a_{n+1}-2a_n\}$是以3为首项，2为公比的等比数列.

于是

$$a_{n+1}-2a_n=3\times 2^{n-1}. \qquad (*)$$

方法1 将($*$)式两边同除以2^{n+1}，得

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{4},$$

所以数列$\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$成等差数列，其首项为$\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$，公差为$\dfrac{3}{4}$.

于是

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}n-\frac{1}{4},$$

即

$$a_n=(3n-1)\cdot 2^{n-2}.$$

方法2 ($*$)式即$a_{n+1}=2a_n+\dfrac{3}{2}\times 2^n$.

设$a_{n+1}+p(n+1)\cdot 2^{n+1}=2(a_n+pn\cdot 2^n)$，其中$p$是待定常数，所以

$$a_{n+1}=2a_n-2p\cdot 2^n.$$

取$-2p=\dfrac{3}{2}$，解得$p=-\dfrac{3}{4}$，所以

$$a_{n+1}-\frac{3}{4}(n+1)\cdot 2^{n+1}=2\left(a_n-\frac{3}{4}n\cdot 2^n\right).$$

因为$a_1=1$，所以$a_1-\dfrac{3}{4}\times 1\times 2^1=-\dfrac{1}{2}\neq 0$，从而$a_n-\dfrac{3}{4}n\cdot 2^n\neq 0$，

所以
$$\frac{a_{n+1}-\frac{3}{4}(n+1)\cdot 2^{n+1}}{a_n-\frac{3}{4}n\cdot 2^n}=2,$$

即数列 $\left\{a_n-\frac{3}{4}n\cdot 2^n\right\}$ 成等比数列，其首项为 $-\frac{1}{2}$，公比为 2.

于是
$$a_n-\frac{3}{4}n\cdot 2^n=-\frac{1}{2}\times 2^{n-1},$$

即
$$a_n=(3n-1)\cdot 2^{n-2},\ n\in \mathbf{N}^*.$$

请仿照上面的解法，思考：

已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，$a_2=1$，且对任意的 $n\in \mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，求 a_n 的表达式.

阅读

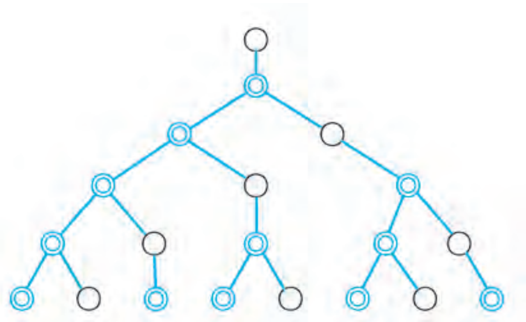
斐波那契数列

斐波那契（L. Fibonacci，约 1170—1250），生于意大利比萨. 在 1202 年写成《计算之书》一书，该书是欧洲大陆风行好几个世纪的数学教科书，也是一部影响很大的数学专著. 全书共 15 章，其中第 12 章提出了兔子问题.

先看一个有趣的问题：假设一对刚出生的小兔一个月后能长成大兔，再过一个月便能生下一对小兔，此后每个月生一对小兔. 如果不发生死亡，那么一对刚出生的小兔一年可繁殖成多少对？

我们用“◎”表示一对大兔，用“○”表示一对小兔，假设第一对小兔的出生日是某个月初，则逐月统计得每月初的兔子对数：

第 1 个月
第 2 个月
第 3 个月
第 4 个月
第 5 个月
第 6 个月



记第 n 个月的兔子对数为 F_n，则
$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_3=2,\ F_4=3,\ F_5=5,\ F_6=8,\ \cdots.$$

考察数列 $\{F_n\}$ 的规律，不难发现，从第三项开始，每一项都是它的前两项的和，即
$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\ (n\in \mathbf{N}^*).$$

这样，我们就可以依次写出一串数：
$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ \cdots.$$

由此可知，一对兔子一年可繁殖成 $233(=F_{13})$ 对.

上面的数列是由意大利人斐波那契于 1202 年从兔子繁殖问题中提出的，为了纪念他，人们就把这种数列称为斐波那契数列.

由一对兔子繁殖问题而衍生出来的斐波那契数列是数学中的一

个有趣问题，许多问题也都与之有关. 如：

(1) 树木的生长模式. 某种树木第 1 年长出幼枝，第 2 年幼枝长成粗干，第 3 年粗干可生出幼枝. 按照这个规律，到第 6 年树木有多少枝干(图 1)?

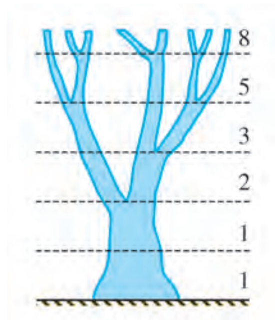


图 1

图 2

(2) 观察蜜蜂爬过六角形蜂房所取的不同路线(图 2). 假定该蜜蜂总是向相邻的蜂房移动并且总是向右移动，那么，蜜蜂到蜂房 0 有一条路，到蜂房 1 有两条路，到蜂房 2 有三条路，到蜂房 3 有五条路……

(3) 由正方形可以构成一系列的长方形，其边长为斐波那契数列的连续项. 在正方形内绘出一个圆的 $\frac{1}{4}$，就可以近似地得到等角螺线(图 3).

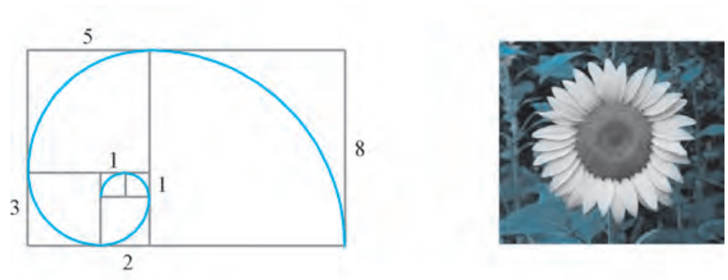


图 3

等角螺线因它的性质而得名，因为在等角螺线中，自某一个定点画出的每一条射线与等角螺线相交成等角.

等角螺线在自然界中也随处可见，如蜘蛛网、向日葵的种子排列形式(另外，向日葵花瓣依两个相反的螺旋形排列，朝一个螺旋方向生长的花瓣数同朝相反的螺旋方向生长的花瓣数，几乎总是斐波那契数列中两个相邻的数)、水流的漩涡、蜗牛壳的螺纹以及星系内星球的分布等.

斐波那契数列最值得注意的性质是：相邻两数的比交替地大于或小于黄金比 $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618\right)$，并且该比值无限趋近于黄金比：

$$\frac{1}{1}=1,\ \frac{1}{2}=0.5,\ \frac{2}{3}\approx 0.666\ 67,\ \frac{3}{5}=0.6,\frac{5}{8}=0.625,$$

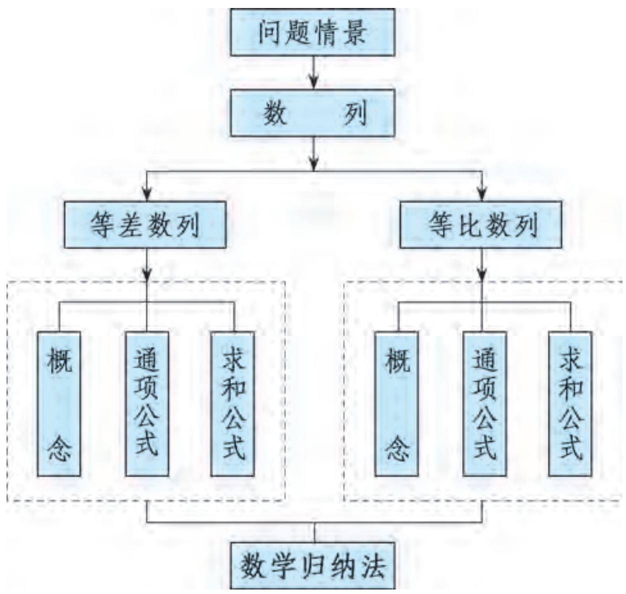
$$\frac{8}{13}\approx 0.615\ 38,\ \frac{13}{21}\approx 0.619\ 05,\ \frac{21}{34}\approx 0.617\ 65,\ \cdots.$$

在研究斐波那契数列的过程中，人们获得了许多意想不到的结果. 由此可见，数学世界是多么的有趣！

本章回顾

本 章 概 览

本章我们根据实例引入了数列的概念，体会了数列作为特殊的函数描述变量变化规律的基本思想. 通过实例使同学们经历了建立等差数列和等比数列这两个数列模型的过程，探索了它们的一些基本数量关系——通项公式和前 n 项和的公式，并运用等差数列和等比数列解决了一些实际问题. 以数列为背景，本章还介绍了数学归纳法.



在本章学习中，要掌握等差数列与等比数列的定义、通项公式以及前 n 项和公式，会用函数的观点理解数列的概念，能通过相应的函数及其图象直观地认识数列的性质. 用数学归纳法证明与自然数有关的命题时，要严格遵守两个步骤.

学会运用类比的方法认识等差数列和等比数列之间的区别和联系，要善于运用等价转化的思想，将一些特殊的数列问题转化为等差数列或等比数列的相应问题.

复 习 题

感受・理解

1. 根据数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=\dfrac{\cos n\pi}{2}$，写出它的前 4 项及第 $2n$ 项.

2. 若直角三角形的三条边的长组成公差为 3 的等差数列，则三边的长分别为（　　）.

A. 5，8，11　　B. 9，12，15

C. 10，13，16　　D. 15，18，21

3. 设$\{a_n\}$是等比数列，有下列四个命题：

① $\{a_n^2\}$是等比数列；　　② $\{a_na_{n+1}\}$是等比数列；

③ $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等比数列；　　④ $\{\lg|a_n|\}$是等比数列.

其中正确命题的个数是（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) $1，\dfrac{3}{4}，\dfrac{5}{9}，\dfrac{7}{16}$；

(2) $\dfrac{2}{1\times 3}，\dfrac{4}{3\times 5}，\dfrac{6}{5\times 7}，\dfrac{8}{7\times 9}$；

(3) 11，101，1 001，10 001；

(4) $\dfrac{2}{3}，-\dfrac{4}{9}，\dfrac{2}{9}，-\dfrac{8}{81}$.

5. 在等差数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_3=16$，$S_{20}=20$，求 S_{10}；

(2) 已知 $a_3+a_7=37$，求 S_9；

(3) 已知 $a_1=1$，$S_4=S_9$，求 S_n；

(4) 已知 $a_1=1$，$d=2$，$S_{n+2}-S_n=24$，求 n.

6. 已知四个数依次成等差数列，且四个数的平方和为 94，首尾两数之积比中间两数之积少 18，求此等差数列.

7. 一个直角三角形三边的长组成等差数列，求这个直角三角形三边长的比.

8.《九章算术》中的“竹九节”问题：现有一根 9 节的竹子，自上而下各节的容积成等差数列，上面 4 节的容积共 3 升，下面 3 节的容积共 4 升，求第 5 节的容积.

9. 在等比数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $q=3$，$S_3=\dfrac{13}{3}$，求 a_n 和 S_n；

(2) 已知 $a_2=6$，$6a_1+a_3=30$，求 a_n 和 S_n.

10. 甲、乙两人同时到银行各存 1 万元，但两人选择的存款方式不同. 甲存 5 年定期储蓄，年利率为 2.88%. 乙存一年定期储蓄，年利率为 2.55%，并在每一年到期时将本息续存一年定期. 若存满 5 年后两人同时从银行取出存款，那么谁获利较多？

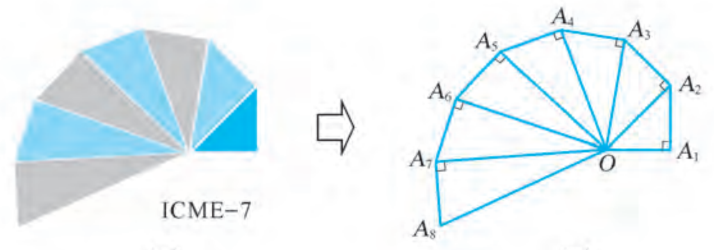
11. (1) 利用等式 $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ 求数列 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的前 n 项和；

(2) 仿(1)探求数列 $a_n=\dfrac{1}{n(n+2)}$ 的前 n 项和.

思考·运用

12. 图(1)是第七届国际数学教育大会(ICME－7)的会徽图案，它是由一串直角三角形演化而成的(如图(2))，其中 $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_7A_8=1$，它可以形成近似的等角螺线. 记 $OA_1，OA_2，\cdots，OA_8$ 的长度所组成的数

列为$\{a_n\}(n\in \mathbf{N}^*, 1\leqslant n\leqslant 8)$. 写出数列$\{a_n\}$的通项公式.



(1) (2)

（第 12 题）

13. 已知等差数列$\{a_n\}$中，前m(m为奇数)项的和为 77，其中偶数项之和为 33，且$a_1-a_m=18$，求通项公式.

14. 利用等比数列的前n项和公式证明

$$a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+b^n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b},$$

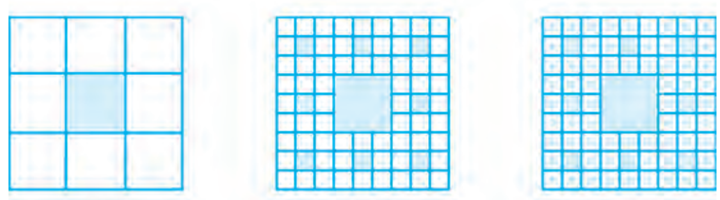
其中$n\in \mathbf{N}^*$，a，b是不为 0 的常数，且$a\neq b$.

15. 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_p=q$，$S_q=p\ (p\neq q)$，求S_{p+q}的值.

探究・拓展

16. (探究题)设数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，且对任意的$n\in \mathbf{N}^*$，都有$a_{n+1}=2a_n+1$，试求数列$\{a_n\}$的通项公式.

17. 一个正方形被等分成九个相等的小正方形，将中间的一个正方形挖掉(图(1))；再将剩余的每个正方形都分成九个相等的小正方形，并将中间的一个正方形挖掉，得图(2)……如此继续下去.


(1) (2) (3)

（第 17 题）

(1) 图(3)共挖掉了多少个正方形?

(2) 设原正方形的边长为a，则第n个图共挖掉了多少个正方形？这些正方形的面积和为多少?

本章测试

一、填空题

1. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1=17$，$d=-2$，则a_{10}的值为________.

2. 在数列$\{a_n\}$中，若$a_n=\begin{cases}2n+1, & n\text{ 为奇数,}\\ 2^n, & n\text{ 为偶数,}\end{cases}$则$a_4+a_5$的值为________.

3. 设x为实数，若三个数3，x，12成等比数列，则x的值为________.

4. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1=1$，$a_4=7$，则它的前5项和S_5的值为________.

5. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差d不为0，若a_1，a_3，a_7成等比数列，则$\dfrac{a_1}{d}$的值为________.

6. 设数列$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，$|q|>1$. 若数列$\{a_n\}$的连续四项构成集合$\{-24,-54,36,81\}$，则q的值为________.

二、选择题

7. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_8=6$，$a_{11}=0$，则a_1的值为(　　).

A. 18　　B. 20　　C. 22　　D. 24

8. 设某厂去年的产值为1，从今年起，该厂计划每年的产值比上年增长8%，则从今年起到第十年，该厂这十年的总产值为(　　).

A. 1.08^9　　B. 1.08^{10}

C. $\dfrac{1.08(1-1.08^{10})}{1-1.08}$　　D. $\dfrac{1-1.08^{10}}{1-1.08}$

9. 若在1和256中间插入3个数，使这5个数成等比数列，则公比q为(　　).

A. ±2　　B. 2　　C. ±4　　D. 4

10. 如果数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足：$S_n=n^2+2n$，那么a_{10}的值为(　　).

A. 18　　B. 19　　C. 20　　D. 21

三、解答题

11. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=23$，$d=-2$. 求：

(1) a_8的值；

(2) 数列$\{a_n\}$中正数项的个数.

12. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_4=4$. 求：

(1) 数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 数列$\{a_n^2\}$的前5项和S_5.

13. 有4个数，其中前3个数成等差数列，后3个数成等比数列，并且第1个数与第4个数的和是16，第2个数与第3个数的和是12，求这4个数.

14. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=2$，$a_5=16$. 设t为实数，S_{2n}为该数列的前$2n$项和，T_n为数列$\{a_n^2\}$的前n项和，且$S_{2n}=tT_n$，求t的值.

15. 设S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，$b_n=\dfrac{S_n}{n}$.

(1) 求证：数列$\{b_n\}$是等差数列；

(2) 当$S_7=7$，$S_{15}=75$时，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

第 5 章　导数及其应用

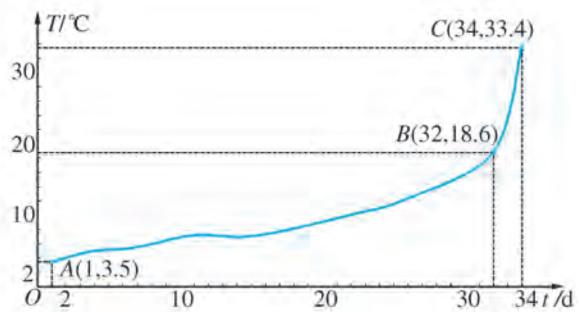
- 导数及其应用
  - 导数的概念
    - 平均变化率
    - 瞬时变化率——导数
  - 导数的运算
    - 基本初等函数的导数
    - 函数的和、差、积、商的导数
    - 简单复合函数的导数
  - 导数在研究函数中的应用
    - 单调性
    - 极大值与极小值
    - 最大值与最小值

只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态，而且也表明过程：运动.

——恩格斯

世界充满着变化，有些变化几乎不被人们所察觉，而有些变化却让人们发出感叹与惊呼.

某市某年 4 月 20 日最高气温为 33.4℃，而 4 月 19 日和 4 月 18 日最高气温分别为 24.4℃ 和 18.6℃，短短两天时间，气温陡增 14.8℃，闷热中的人们无不感叹：“天气热得太快了！”



但是，如果我们将该市某年 3 月 18 日最高气温 3.5℃与 4 月 18 日最高气温 18.6℃进行比较，发现两者温差为 15.1℃，甚至超过了 14.8℃，而人们却不会发出上述感叹.

这是什么原因呢？

原来前者变化得太快，而后者变化得缓慢.

- 用怎样的数学模型刻画变量变化的快与慢？
- 这样的数学模型有哪些应用？

5.1 导数的概念

在本章引言的案例中，气温“陡增”的数学意义是什么呢？

为了弄清气温变化的快慢问题，我们先来观察如图 5-1-1 所示的气温曲线图(以 3 月 18 日作为第一天).

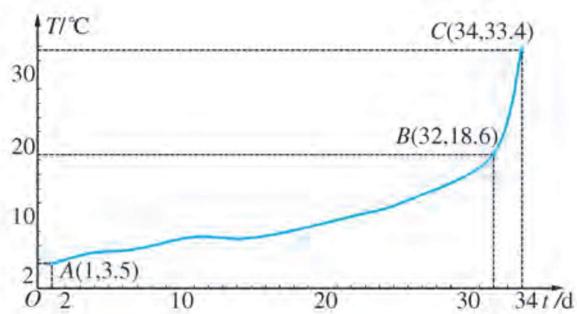


图 5-1-1

容易看出点 B，C 之间的曲线比点 A，B 之间的曲线更加“陡峭”. 陡峭的程度反映了气温变化的快与慢.

● 如何量化曲线上某一段的“陡峭”程度呢？

5.1.1 平均变化率

为了量化气温变化的快与慢，我们不仅要考察气温的变化 $\Delta T = T_C - T_B$，同时还要考察对应时间的变化 $\Delta t = t_C - t_B$. 联想到用斜率来量化直线的倾斜程度，我们用比值

$$\frac{T_C - T_B}{t_C - t_B} = \frac{33.4 - 18.6}{34 - 32}$$

来近似地量化点 B，C 之间这一段曲线的陡峭程度，并称该比值为气温在区间[32，34]上的平均变化率.

气温在区间[1，32]上的平均变化率为

$$\frac{18.6 - 3.5}{32 - 1} = \frac{15.1}{31} \approx 0.5.$$

气温在区间[32，34]上的平均变化率为

$$\frac{33.4 - 18.6}{34 - 32} = \frac{14.8}{2} = 7.4.$$

虽然点 A，B 之间的温差与点 B，C 之间的温差几乎相同，但它

们的平均变化率却相差很大. 一般地,

> 函数 $f(x)$在区间$[x_1, x_2]$上的**平均变化率**(average rates of change)为
>
> $$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

在图 5-1-1 中,我们可以感受到:平均变化率是曲线陡峭程度的“数量化”,或者说,曲线陡峭程度是平均变化率的“视觉化”.

例 1 某婴儿从出生到第 12 个月的体重变化如图 5-1-2 所示,试分别计算从出生到第 3 个月以及第 6 个月到第 12 个月该婴儿体重的平均变化率.

解 从出生到第 3 个月,该婴儿体重的平均变化率为

$$\frac{6.5-3.5}{3-0}=1(\text{kg/月}),$$

从第 6 个月到第 12 个月,该婴儿体重的平均变化率为

$$\frac{11-8.6}{12-6}=\frac{2.4}{6}=0.4(\text{kg/月}).$$

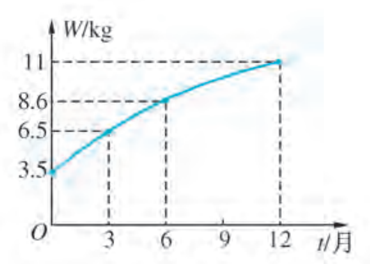


图 5-1-2

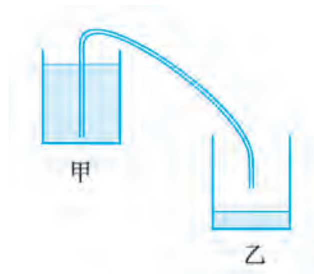


图 5-1-3

例 2 水经过虹吸管从容器甲流向容器乙(图 5-1-3),t s 后容器甲中水的体积 $V(t)=5e^{-0.1t}$(单位: cm^3),试计算第一个 10 s 内 V 的平均变化率.

解 在区间$[0, 10]$上,体积 V 的平均变化率为

$$\frac{V(10)-V(0)}{10-0}\approx\frac{1.839-5}{10}=-0.3161(\text{cm}^3/\text{s}),$$

即第一个 10 s 内容器甲中水的体积的平均变化率为$-0.3161\ \text{cm}^3/\text{s}$(负号表示容器甲中的水在减少).

例 3 已知函数 $f(x)=x^2$，分别计算函数 $f(x)$在区间$[1, 3]$，$[1, 2]$，$[1, 1.1]$，$[1, 1.001]$上的平均变化率.

解 函数 $f(x)$在$[1, 3]$上的平均变化率为

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{3^2-1^2}{2}=4,$$

函数 $f(x)$在$[1, 2]$上的平均变化率为

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{2^2-1^2}{1}=3,$$

函数 $f(x)$在$[1, 1.1]$上的平均变化率为

$$\frac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1}=\frac{1.1^2-1^2}{0.1}=2.1,$$

函数 $f(x)$在$[1, 1.001]$上的平均变化率为

$$\frac{f(1.001)-f(1)}{1.001-1}=\frac{1.001^2-1^2}{0.001}=2.001.$$

例 4 已知函数 $f(x)=2x+1$，$g(x)=-2x$，分别计算函数 $f(x)$及 $g(x)$在区间$[-3, -1]$，$[0, 5]$上的平均变化率.

解 函数 $f(x)$在$[-3, -1]$上的平均变化率为

$$\frac{f(-1)-f(-3)}{(-1)-(-3)}=\frac{[2\times(-1)+1]-[2\times(-3)+1]}{2}=2,$$

函数 $f(x)$在$[0, 5]$上的平均变化率为

$$\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=2;$$

函数 $g(x)$在$[-3, -1]$上的平均变化率为

$$\frac{g(-1)-g(-3)}{(-1)-(-3)}=-2,$$

函数 $g(x)$在$[0, 5]$上的平均变化率为

$$\frac{g(5)-g(0)}{5-0}=-2.$$

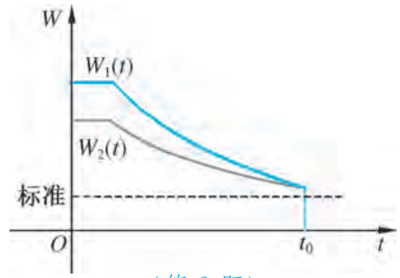
思考

在例 4 的求解中，你能发现一次函数 $y=kx+b$ 在区间$[m, n]$上的平均变化率有什么特点吗？

练习

1. 甲、乙两人投入相同的资金经营某商品，甲用 5 年时间获利 10 万元，乙用 5 个月时间获利 2 万元，如何比较和评价甲、乙两人的经营成果？

2. 环境保护部门在规定的排污达标日期前，对甲、乙两家企业进行检查，连续检测结果如图所示（其中 $W_1(t)$，$W_2(t)$ 分别表示甲、乙两企业的排污量），试比较这两家企业的治污效果.



（第 2 题）

3. 已知函数 $f(x)=3x+1$，求 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均变化率：

（1）$a=-1$，$b=2$；　　（2）$a=-1$，$b=1$；

（3）$a=-1$，$b=-0.9$.

4. 求经过函数 $y=x^2$ 图象上两点 A，B 的直线的斜率：

（1）$x_A=1$，$x_B=1.001$；　　（2）$x_A=1$，$x_B=0.9$；

（3）$x_A=1$，$x_B=0.99$；　　（4）$x_A=1$，$x_B=0.999$.

5. 若一质点的运动方程为 $S=t^2+3$（位移单位：m，时间单位：s），则在时间段 $[3,3+\Delta t]$ 上的平均速度是多少？

5.1.2 瞬时变化率——导数

平均变化率近似地刻画了曲线在某区间上的变化趋势，那么，如何精确地刻画曲线上某一点处的变化趋势呢？

1. 曲线上一点处的切线

如果将点 P 附近的曲线放大，那么就会发现，曲线在点 P 附近看上去有点像是直线（图 5－1－4）.

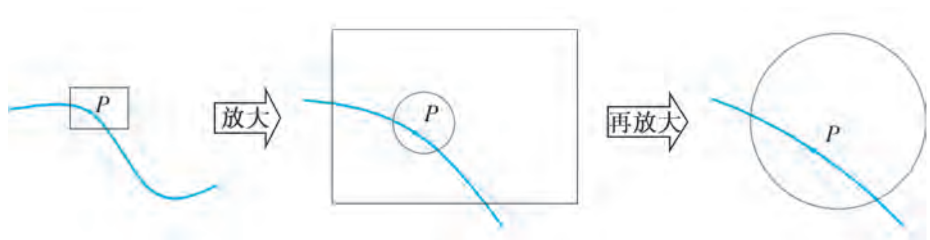


图 5－1－4

如果将点 P 附近的曲线再放大，那么就会发现，曲线在点 P 附近看上去几乎成了直线. 事实上，如果继续放大，那么曲线在点 P 附近将逼近一条确定的直线 l，该直线 l 是经过点 P 的所有直线中最逼近曲线的一条直线（图 5－1－5）.

因此，在点 P 附近我们可以用这条直线 l 来代替曲线. 也就是

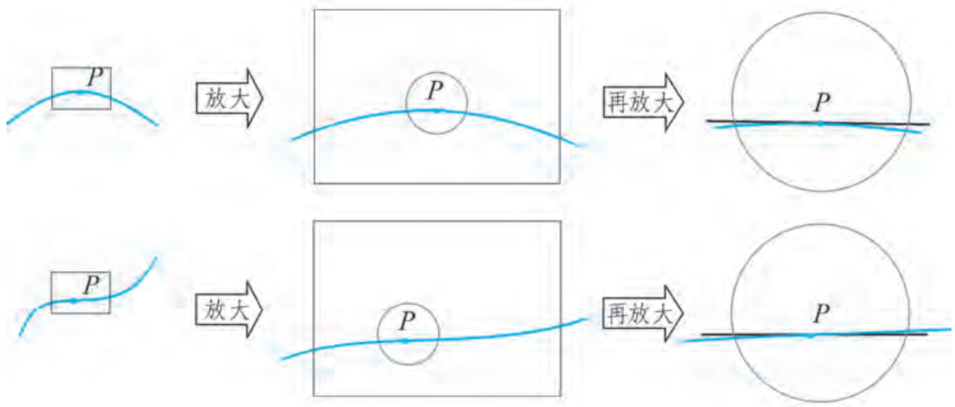


图 5-1-5

说，在点 P 附近，曲线可以看作直线(即在很小范围内以直代曲).

既然点 P 附近的曲线被看作直线 l，那么我们可以用直线 l 的斜率来刻画曲线经过点 P 时上升或下降的“变化趋势”.

探　究

如图 5-1-6，直线 l_1，l_2 为经过曲线上一点 P 的两条直线.

(1) 试判断哪一条直线在点 P 附近更加逼近曲线；

(2) 在点 P 附近能作出一条比 l_1，l_2 更加逼近曲线的直线 l_3 吗？

(3) 在点 P 附近能作出一条比 l_1，l_2，l_3 更加逼近曲线的直线 l_4 吗？

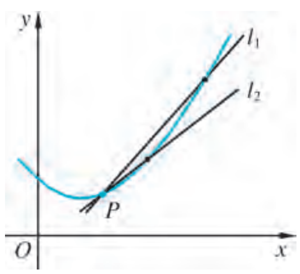


图 5-1-6

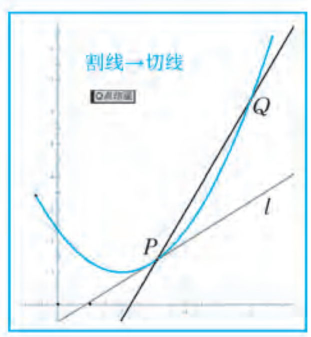


图 5-1-7

怎样找到经过曲线上一点 P 处最逼近曲线的直线 l 呢？

如图 5-1-7，设 Q 为曲线 C 上不同于 P 的一点，这时，直线 PQ 称为曲线的**割线**(secant line). 随着点 Q 沿曲线 C 向点 P 运动，割线 PQ 在点 P 附近越来越逼近曲线 C. 当点 Q 无限逼近点 P 时，直线 PQ 最终就成为在点 P 处最逼近曲线的直线 l，这条直线 l 称为曲线在点 P 处的**切线**(tangent line).

利用这种割线逼近切线的方法，我们来计算曲线上一点处切线的斜率.

Δx 可正也可负，当 Δx 取负值时，点 Q 位于点 P 的左侧.

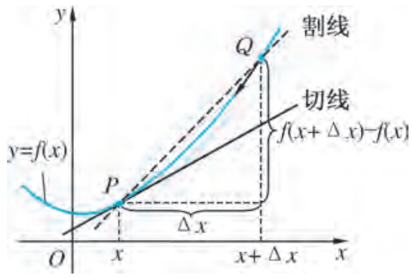


图 5-1-8

如图 5-1-8，设曲线 C 上一点 $P(x,\ f(x))$，过点 P 的一条割线交曲线 C 于另一点 $Q(x+\Delta x,\ f(x+\Delta x))$，则割线 PQ 的斜率为

$$k_{PQ}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

当点 Q 沿曲线 C 向点 P 运动，并无限逼近点 P 时，割线 PQ 逼近点 P 的切线 l，从而割线的斜率逼近切线 l 的斜率，即当 Δx 无限趋近于 0 时，$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 无限趋近于点 $P(x,\ f(x))$ 处的切线的斜率.

例 5 已知 $f(x)=x^2$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线斜率.

分析 为求得过点 $(2,\ 4)$ 的切线斜率，我们从经过点 $(2,\ 4)$ 的任意一条直线（割线）入手.

解 设 $P(2,\ 4)$，$Q(2+\Delta x,\ (2+\Delta x)^2)$，则割线 PQ 的斜率为

$$k_{PQ}=\frac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}=4+\Delta x.$$

当 Δx 无限趋近于 0 时，k_{PQ} 无限趋近于常数 4，从而曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(2,\ 4)$ 处的切线斜率为 4.

信息技术

在 Excel 中计算（图 5-1-9），可知当 Δx 越接近 0 时，割线 PQ 的斜率 k_{PQ} 就越接近常数 4.

单元格 B2，D2 中的公式.

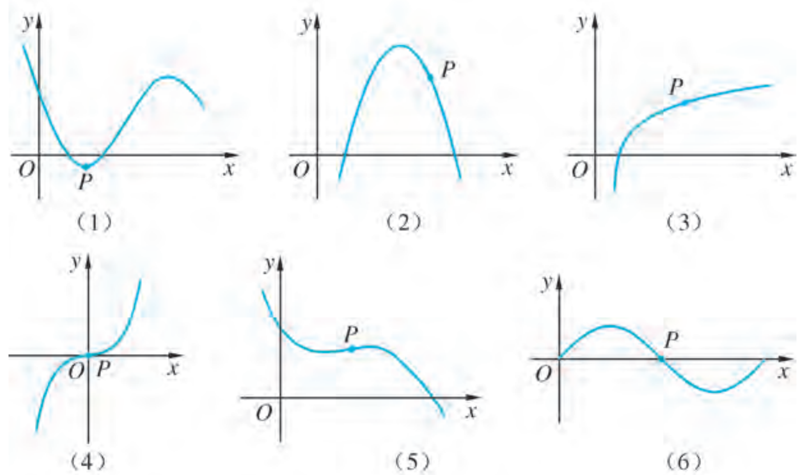
	A	B	C	D
1	Δx	$\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}$	Δx	$\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}$
2	1	5	-1	3
3	0.1	4.1	-0.1	3.9
4	0.01	4.01	-0.01	3.99
5	0.001	4.001	-0.001	3.999
6	0.0001	4.0001	-0.0001	3.9999
7	0.00001	4.00001	-0.00001	3.99999

	B	C	D
2	=((2+A2)^2-2^2)/A2	-1	=((2+C2)^2-2^2)/C2

图 5-1-9

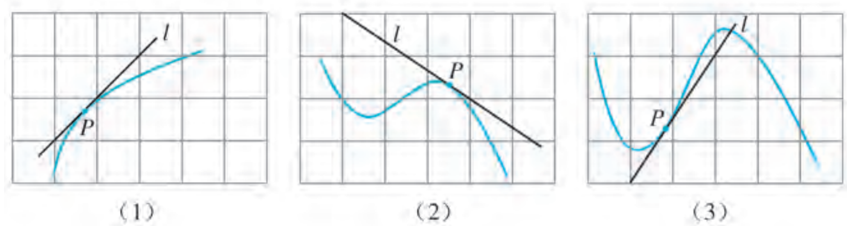
练　习

1. 利用直尺，用割线逼近切线的方法作出下列曲线在点 P 处的切线.



（第 1 题）

2. 在下列 3 个图中，直线 l 为曲线在点 P 处的切线，分别求 l 的斜率.

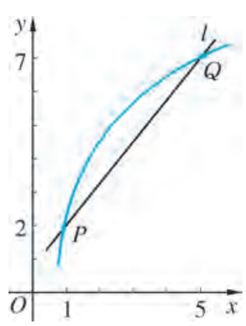


（第 2 题）

3. 如图，直线 l 为经过曲线上点 P 和 Q 的割线.

(1) 若 $P(1,\ 2)$，$Q(5,\ 7)$，求 l 的斜率；

(2) 当点 Q 沿曲线向点 P 靠近时，l 的斜率变大还是变小？



（第 3 题）

4. (1) 运用例 5 中割线逼近切线的方法，分别求曲线 $y=x^2$ 在 $x=0$，$x=-2$，$x=3$ 处的切线斜率.

(2) 用割线逼近切线的方法，求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处切线的斜率.

2. 瞬时速度与瞬时加速度

在物理学中，运动物体的位移与所用时间的比称为**平均速度**，它反映了物体在某段时间内运动的快慢程度. 那么，如何精确刻画物体在某一时刻运动的快慢程度呢？

我们先看下面的实例. 跳水运动员从 10 m 跳台腾空到入水的过程中，不同时刻的速度是不同的. 假设 t s 后运动员相对于水面的高度为

$$H(t)=-4.9t^2+6.5t+10,$$

试确定 $t=2$ s 时运动员的速度.

先求出运动员在 2 s 到 2.1 s（即 $t\in[2,\ 2.1]$）的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{H(2.1)-H(2)}{2.1-2}=-13.59(\mathrm{m/s}).$$

同样，可以算出更短的时间内的平均速度.

由图 5-1-10 可以看出，当 Δt 越接近 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 越接近常数 -13.1，这一常数可作为运动员在 $t=2$ s 时的瞬时速度.

单元格 C2 中的公式.

	A	B	C	D	E	F
1	时间区间	Δt	平均速度	时间区间	Δt	平均速度
2	[2, 2.1]	0.1	-13.59	[1.9, 2]	-0.1	-12.61
3	[2, 2.01]	0.01	-13.149	[1.99, 2]	-0.01	-13.051
4	[2, 2.001]	0.001	-13.1049	[1.999, 2]	-0.001	-13.0951
5	[2, 2.0001]	0.0001	-13.10049	[1.9999, 2]	-0.0001	-13.09951
6	[2, 2.00001]	0.00001	-13.100049	[1.99999, 2]	-0.00001	-13.099951

	C
2	=((-4.9*(2+B2)^2+6.5*(2+B2)+10)-(-4.9*2^2+6.5*2+10))/B2

图 5-1-10

一般地，如果当 Δt 无限趋近于 0 时，运动物体位移 $S(t)$ 的平均变化率 $\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$ 无限趋近于一个常数，那么这个常数称为物体在 $t=t_0$ 时的**瞬时速度**，也就是位移对于时间的瞬时变化率.

类似地，我们还可以求出某一时刻物体运动的瞬时加速度.

例 6 已知一辆轿车在公路上作加速直线运动，假设 t s 时的速度为 $v(t)=t^2+3$，求当 $t=t_0$ s 时轿车的瞬时加速度 a.

解 在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 的时间内，轿车的平均加速度为

$$\begin{aligned}\bar{a}&=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}\\&=\frac{(t_0+\Delta t)^2+3-(t_0^2+3)}{\Delta t}=2t_0+\Delta t,\end{aligned}$$

当 Δt 无限趋近于 0 时，$\bar{a}$ 无限趋近于 $2t_0$，即 $a=2t_0$.

所以，当 $t=t_0$ s 时轿车的瞬时加速度为 $2t_0$.

一般地，如果当 Δt 无限趋近于 0 时，运动物体速度 $v(t)$ 的平均变化率 $\dfrac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}$ 无限趋近于一个常数，那么这个常数称为物体在 $t=t_0$ 时的**瞬时加速度**，也就是速度对于时间的瞬时变化率.

练 习

1. 自由落体运动的位移 S 与时间 t 的关系为 $S=\frac{1}{2}gt^2$（位移单位：m，时间单位：s，g 为常数）.
   (1) 计算 t 分别在[3，3.1]，[3，3.01]，[3，3.001]各时间段内的平均速度；
   (2) 计算 t 在[3，3+Δt]内的平均速度；
   (3) 求 $t=3$ 时的瞬时速度；
   (4) 求 $t=t_0$ 时的瞬时速度；

(5) 根据(4)的结果，分别求出 $t=0,1,2$ 时的瞬时速度.

2. 一质点的运动方程为 $S=t^2+10$(位移单位：m，时间单位：s)，试求该质点在 $t=3$ 时的瞬时速度.

3. 导数

前面的实际问题都涉及了函数在某一点处的瞬时变化率——导数.

设函数 $y=f(x)$ 在区间(a,b)上有定义，$x_0\in(a,b)$，若 Δx 无限趋近于 0 时，比值

Δx 表示自变量 x 的改变量，Δy 表示相应的函数的改变量.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

无限趋近于一个常数 A，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处**可导**(derivable)，并称该常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**导数**(derivative)，记作 $f'(x_0)$.

若用符号"→"表示"无限趋近于"，则"当 Δx 无限趋近于 0 时，$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 无限趋近于常数 A"就可以表示为

$$\text{“当 }\Delta x\to 0\text{ 时，}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\to A\text{”.}$$

通常又可表示为

lim，是英文 limit 的缩写，这在高等数学的"极限知识"中将会介绍.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A,$$

即
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

导数 $f'(x_0)$ 的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率(图 5-1-11).

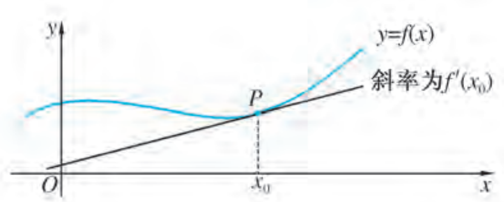


图 5-1-11

例 7 已知 $f(x)=x^2+2$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数 $f'(1)$；

(2) 求 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数 $f'(a)$.

解 (1) 因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\frac{(1+\Delta x)^2+2-(1^2+2)}{\Delta x}=2+\Delta x,$$

所以，当 $\Delta x \to 0$ 时，$2+\Delta x \to 2$，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2.$$

故 $f(x)$在 $x=1$ 处的导数等于 2，即 $f'(1)=2$.

(2) 因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\frac{(a+\Delta x)^2+2-(a^2+2)}{\Delta x}=2a+\Delta x,$$

所以，当 $\Delta x\to 0$ 时，$2a+\Delta x\to 2a$，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2a+\Delta x)=2a.$$

故 $f(x)$ 在$x=a$ 处的导数等于 $2a$，即$f'(a)=2a$.

若 $f(x)$对于区间(a,b)内任一点都可导，则 $f(x)$在各点处的导数也随着自变量 x 的变化而变化，因而也是自变量 x 的函数，该函数称为 $f(x)$的**导函数**(derived function)，记作 $f'(x)$.

如无特别说明，本章所涉及的函数都是可导函数.

在不引起混淆时，导函数 $f'(x)$也简称为 $f(x)$的导数.

瞬时速度是运动物体的位移 $S(t)$对于时间 t 的导数，即

$$v(t)=S'(t);$$

瞬时加速度是运动物体的速度 $v(t)$对于时间 t 的导数，即

$$a(t)=v'(t).$$

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数$f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值. 例如，$f(x)$ 在 $x=2$，$x=2x_0+3$ 处的导数分别是导函数$f'(x)$ 在该处的函数值$f'(2)$，$f'(2x_0+3)$.

练　习

1. 质点的运动方程为 $S=3t+1$(位移单位：m，时间单位：s)，分别求该质点在 $t=1$，$t=2$ 时的速度.
2. 求下列函数在 $x=x_0$ 处的导数：
   (1) $y=3x+1, x_0=3$；
   (2) $y=x^2, x_0=a$；
   (3) $y=\dfrac{1}{x}, x_0=2$.
3. $f'(1)$与 $f(1)$的含义有什么不同？$f'(1)$与 $f'(x)$的含义有什么不同？

4. 求函数 $y=(2x-1)^2$ 在 $x=3$ 处的导数.

5. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $M(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y=\frac{1}{2}x+2$，求 $f(1)+f'(1)$ 的值.

6. 已知某水库在泄洪过程中水面的高度与泄洪时间 t 的函数关系是 $h=f(t)$，请说明 $f'(t)$的实际意义.

链 接

边 际 函 数

在经济学中，生产 x 件产品的成本称为成本函数，记为 $C(x)$；出售 x 件产品的收益称为收益函数，记为 $R(x)$；$R(x)-C(x)$称为利润函数，记为 $P(x)$. 相应地，它们的导数 $C'(x)$，$R'(x)$和 $P'(x)$分别称为边际成本函数、边际收益函数和边际利润函数.

经济学中涉及的函数，有时是“离散型”函数，我们仍将其看成“连续型”函数. 参看《数学(必修第一册)》“函数的实际应用”.

如图 5-1-12，$C(x)$在 $x=a$ 处的导数 $C'(a)$称为生产规模为 a 时的边际成本值，该值给出了生产规模为 a 时，再增加 1 个产品，成本的增加量. 边际值表现为两个微增量的比.

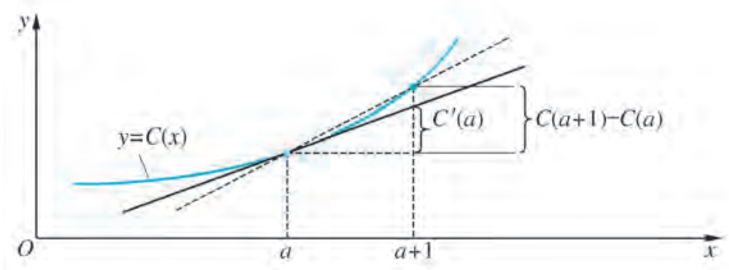


图 5-1-12

由图可见：

$$C(a+1)-C(a)\approx C'(a)\times 1=C'(a).$$

$C(a+1)-C(a)$ 表示生产规模由 a 增加为 $a+1$ 时成本的相应增加量. 经济学中，边际成本 $C'(a)$ 通常近似地看成生产规模增加 1 个单位时成本的增加量. 类似地，对 $R'(x)$和 $P'(x)$也有相应的数学模型.

试用上述知识解决下面的问题：设成本函数 $C(x)=0.005x^3-3x$，x 为每天生产的产品数.

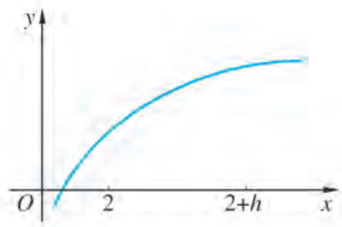
(1) 若每天生产产品数由 1 000 件改为 1 001 件，成本的绝对增加值是多少？

(2) 在 $x=1\,000$ 处的边际成本是多少？

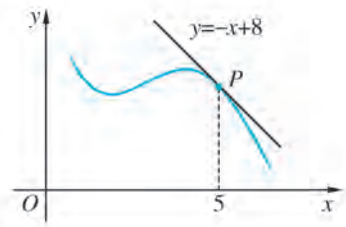
习题 5.1

感受·理解

1. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，在图中作线段，分别表示 $f(2)$，$f(2+h)$，$f(2+h)-f(2)$，h.



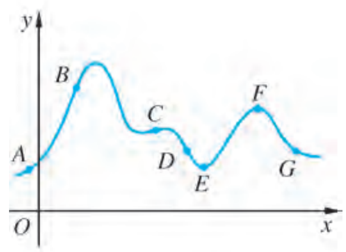
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线方程是 $y=-x+8$，求 $f(5)$ 及 $f'(5)$.

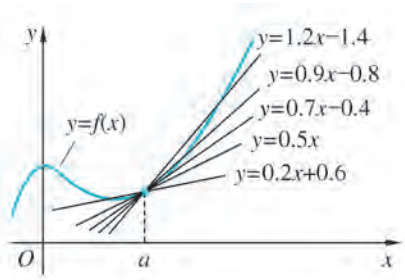
3. 如图，A，B，C，D，E，F，G 为函数 $y=f(x)$ 图象上的点. 在哪些点处，曲线的切线斜率为 0？在哪些点处，切线的斜率为正？在哪些点处，切线的斜率为负？在哪一点处，切线的斜率最大？在哪一点处，切线的斜率最小？



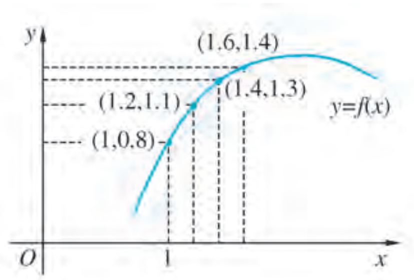
（第 3 题）

4. 曲线 $y=x^2$ 在点 $P\left(\frac{3}{4},\ \frac{9}{16}\right)$ 处的切线斜率是多少？写出在点 P 处的切线方程.

5. 如图，求 $f(a)$，并估计 $f'(a)$.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 根据所给函数 $y=f(x)$ 的图象，估计 $f'(1)$.

7. 求值：(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-3^2}{h}$；

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}$.

8. 已知函数 $f(x)=x^2$，记 $I_n=\left[2,2+\frac{1}{2^n}\right]$，$n\in\mathbf{N}^*$，求 $f(x)$在区间 I_n 上的平均变化率 a_n，并观察当 n 不断增大时 a_n 的变化趋势.

9. (1) 已知 $f(x+h)-f(x)=2hx+5h+h^2$,用割线逼近切线的方法求 $f'(x)$;
(2) 已知 $g(x+h)-g(x)=3hx^2+3h^2x+h^3$,用割线逼近切线的方法求 $g'(x)$.

思考·运用

10. 已知曲线 $y=x^2$ 的一条切线的斜率是 -4,求切点的坐标.

11. 已知函数 $f(x)=-\dfrac{6}{x}$.

(1) 函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$, $[1,1.5]$, $[1,1.1]$ 上的平均变化率各是多少?
(2) 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的瞬时变化率是多少?

12. 蜥蜴的体温与阳光照射的关系近似为 $T(t)=\dfrac{120}{t+5}+15$,其中 $T(t)$ 为蜥蜴的体温(单位:℃),t 为太阳落山后的时间(单位:min).
(1) 从 $t=0$ 到 $t=10$,蜥蜴体温下降了多少?
(2) 从 $t=0$ 到 $t=10$,蜥蜴体温的平均变化率是多少?
(3) 当 $t=10$ 时,蜥蜴体温的瞬时变化率是多少?
(4) 蜥蜴体温的瞬时变化率为 -1 ℃/min 时的时刻 t 是多少(精确到 0.01)?

探究·拓展

13. 生产某塑料管的利润函数为 $P(n)=-n^3+600n^2+67\,500n-1\,200\,000$,其中 n 为工厂每月生产该塑料管的根数,利润 $P(n)$ 的单位为元.
(1) 求边际利润函数 $P'(n)$;
(2) 求 n 的值,使 $P'(n)=0$;
(3) 解释(2)中 n 的值的实际意义.

14. 对于函数 $f(x)$,若 $f'(x_0)$存在,求:

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{-h}$;

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$.

5.2 导数的运算

在上一节中，我们用割线逼近切线的方法引入了导数的概念，即函数在某一点处的瞬时变化率. 那么，

- 如何求基本初等函数的导数呢?
- 导数的运算法则有哪些?

5.2.1 基本初等函数的导数

根据导数的概念，求函数导数的过程可以用下面的流程图(图 5-2-1)来表示.

$$\boxed{\text{给定函数 } y=f(x)}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{计算 } \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=A(x)}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{f'(x)=A(x)}$$

图 5-2-1

(1) 对于 $f(x)=kx+b$ (k, b 为常数)，因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\frac{k(x+\Delta x)+b-(kx+b)}{\Delta x}=k,$$

所以
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=k.$$

故
$$f'(x)=k.$$

(2) 对于 $f(x)=x^2$，因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$
$$=\frac{2x(\Delta x)+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=2x+\Delta x,$$

所以 $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

故 $$f'(x) = 2x.$$

(3) 对于 $f(x) = x^3$，因为

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \frac{3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\ &= 3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2, \end{aligned}$$

所以 $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}[3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2] = 3x^2.$$

故 $$f'(x) = 3x^2.$$

(4) 对于 $f(x) = \dfrac{1}{x}$，因为

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x}}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x(x + \Delta x)x} \\ &= \frac{-1}{(x + \Delta x)x} = \frac{-1}{x^2 + x(\Delta x)}, \end{aligned}$$

所以 $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x^2 + x(\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

故 $$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

(5) 对于 $f(x) = \sqrt{x}$，因为

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}, \end{aligned}$$

所以 $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

故 $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

以上求导公式可以归纳如下：

(1) $(kx+b)'=k$ (k, b 为常数);

(2) $C'=0$(C 为常数);

(3) $(x)'=1$;

(4) $(x^2)'=2x$;

(5) $(x^3)'=3x^2$;

(6) $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$;

(7) $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

思　考

由上面的求导公式(3)～(6),你能发现什么规律?

为方便叙述,我们把函数 $y=x^\alpha$(α 为常数),$y=a^x$($a>0$, $a\neq 1$), $y=\log_a x$($a>0$, $a\neq 1$), $y=\sin x$, $y=\cos x$ 等函数称为基本初等函数.

对于基本初等函数,有下面的求导公式:

(8) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$($\alpha$ 为常数);

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$ ($a>0$,且 $a\neq 1$);

(10) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$;

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\dfrac{1}{x\ln a}$ ($a>0$,且 $a\neq 1$);

(12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

(13) $(\sin x)'=\cos x$;

(14) $(\cos x)'=-\sin x$.

练　习

1. 对于函数 $f(x)$来说, $f'(1)$, $f'(2)$与 $f'(x)$有什么区别与联系?
2. 求下列函数的导数:

   (1) $y=\dfrac{1}{x^3}$;　(2) $y=\sqrt[3]{x^5}$;　(3) $y=4^x$;　(4) $y=\log_3 x$.
3. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点$\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$处的切线的方程.
4. 设 b 为实数,若直线 $y=-x+b$ 为函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 图象的切线,求 b 的值及切点坐标.
5. 设 b 为实数,直线 $y=\dfrac{1}{2}x+b$ 能作为下列函数图象的切线吗?若能,求出切点坐标;若不能,简述理由.

   (1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$;　(2) $f(x)=x^4$;　(3) $f(x)=\sin x$;　(4) $f(x)=\mathrm{e}^x$.

6. 已知函数 $f(x)=x^3$，求 $(f(-2))'$ 以及 $f'(-2)$.

7. 设 b 为实数，若直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 是曲线 $y=\ln x(x>0)$ 的一条切线，求 b 的值.

5.2.2 函数的和、差、积、商的导数

已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 的导数 $f'(x)$，$g'(x)$，怎样求 $(f(x)+g(x))'$ 呢？

例 1 求 $y=x^2+x$ 的导数.

解 因为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{[(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)]-(x^2+x)}{\Delta x}\\&=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}+\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}\\&=2x+\Delta x+1,\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+1$，得 $y'=2x+1$.

由于 $(x^2)'=2x$，$x'=1$，则有

$$(x^2+x)'=(x^2)'+x'.$$

一般地，我们有函数和的求导法则：

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x),$$

即两个函数的和的导数，等于这两个函数的导数的和.

类似地，函数的差、积、商的求导法则是：

$$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x),$$

$$(Cf(x))'=Cf'(x)(C\text{ 为常数}),$$

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\ (g(x)\neq 0).$$

尝试利用定义证明一下.

有了函数的和、差、积、商的求导法则，我们就可以直接运用基本

初等函数的求导公式求出较为复杂的函数的导数.

例 2 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=x^2+\sin x$；

(2) $g(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+2$.

解 (1) $f'(x)=(x^2+\sin x)'=(x^2)'+(\sin x)'=2x+\cos x$.

(2) $g'(x)=\left(x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+2\right)'=3x^2-3x-6$.

例 3 求下列函数的导数：

(1) $h(x)=x\sin x$； (2) $f(x)=x^2\mathrm{e}^x$；

(3) $S(t)=\dfrac{t^2+1}{t}$； (4) $f(x)=\tan x$.

解 (1) $h'(x)=(x\sin x)'=x'\sin x+x(\sin x)'=\sin x+x\cos x$.

(2) $f'(x)=(x^2\mathrm{e}^x)'=(x^2)'\mathrm{e}^x+x^2(\mathrm{e}^x)'=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x$.

(3) $S'(t)=\left(\dfrac{t^2+1}{t}\right)'=\dfrac{(t^2+1)'t-(t^2+1)t'}{t^2}=\dfrac{2t\cdot t-t^2-1}{t^2}=\dfrac{t^2-1}{t^2}$.

(4) $f'(x)=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

思考

例 3(3)还有其他解法吗?

练习

1. 求下列函数的导数：

   (1) $y=x^2+\cos x$； (2) $y=2^x-2\ln x$.

2. 求曲线 $y=x^2+2x-3$ 在 $x=2$ 处的切线方程.
3. 用两种方法求函数 $y=(2x-1)(x+3)$ 的导数.
4. 求下列函数的导数：

   (1) $f(x)=x\mathrm{e}^x$； (2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$；

   (3) $f(x)=\dfrac{x}{2x+3}$； (4) $f(x)=x\ln x$；

   (5) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}$； (6) $f(x)=\dfrac{2x}{\ln x}$.

5. 已知函数 $f(x)$的导数是 $f'(x)$，求函数$(f(x))^2$的导数.

5.2.3 简单复合函数的导数

观察函数 $y=(3x-1)^2$ 和 $y=\sin 2x$，不难发现，$y=(3x-1)^2$ 由 $y=u^2$ 及 $u=3x-1$ 复合而成，$y=\sin 2x$ 由 $y=\sin u$ 及 $u=2x$ 复合而成. 像这样由基本初等函数复合而成的函数，称为复合函数.

那么，怎样求复合函数的导数呢？

先考察 $y=(3x-1)^2$，将 y 关于 x 的导数记为 y'_x.

一方面，

$$y'_x=((3x-1)^2)'=(9x^2-6x+1)'=18x-6=6(3x-1).$$

另一方面，将 $y=(3x-1)^2$ 看成由 $y=u^2$ 及 $u=3x-1$ 复合而成，并将 y 关于 u 的导数记为 y'_u，即 $y'_u=(u^2)'=2u$. 同理，将 u 关于 x 的导数记为 u'_x，即 $u'_x=(3x-1)'=3$.

因而有

$$y'_x=6(3x-1)=2(3x-1)\times 3=2u\times 3,$$

即

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

再考察 $y=\sin 2x$.

一方面，

$y'_x=(\sin 2x)'=(2\sin x\cos x)'=2(\sin x)'\cos x+2\sin x(\cos x)'=2\cos^2 x-2\sin^2 x=2\cos 2x$.

另一方面，将 $y=\sin 2x$ 看成由 $y=\sin u$ 及 $u=2x$ 复合而成，仿上可得，$y'_u=(\sin u)'=\cos u$，$u'_x=(2x)'=2$.

因而也有

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

一般地，我们有：

> 若 $y=f(u)$，$u=ax+b$，则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$，即
>
> $$y'_x=y'_u\cdot a.$$

例 4 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x-3)^3$；　　(2) $y=\ln(5x+1)$.

解 (1) $y=(2x-3)^3$ 可由 $y=u^3$ 及 $u=2x-3$ 复合而成，

所以 $y'_x=y'_u\times 2=(u^3)'\times 2=3u^2\times 2=6u^2=6(2x-3)^2$.

(2) $y=\ln(5x+1)$ 可由 $y=\ln u$ 及 $u=5x+1$ 复合而成，

所以 $y'_x = y'_u \times 5 = (\ln u)' \times 5 = \dfrac{1}{u} \times 5 = \dfrac{5}{5x+1}$.

例 5 求下列函数的导数：

(1) $y = \dfrac{1}{3x-1}$；　　(2) $y = \cos(1-2x)$.

解 (1) $y = \dfrac{1}{3x-1}$ 可由 $y = \dfrac{1}{u}$ 及 $u = 3x-1$ 复合而成，

所以 $y'_x = y'_u \times 3 = \left(\dfrac{1}{u}\right)' \times 3 = -\dfrac{1}{u^2} \times 3 = -\dfrac{3}{(3x-1)^2}$.

(2) $y = \cos(1-2x)$ 可由 $y = \cos u$ 及 $u = 1-2x$ 复合而成，

所以 $y'_x = y'_u \times (-2) = (\cos u)' \times (-2) = (-\sin u) \times (-2) = 2\sin(1-2x)$.

练 习

1. 指出以下函数可以分别看作是由哪两个函数复合而成的：

(1) $y=(3+\sin x)^4$；　　(2) $y=\ln \dfrac{1}{2x+1}$；

(3) $y=2^{2x-1}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{1-\cos x}$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y = (2x+3)^2$；　　(2) $y = (1-3x)^3$；

(3) $y = e^{2x}$；　　(4) $y = \ln \dfrac{1}{x}$.

3. 求曲线 $y = \sin 2x$ 在点 $P(\pi, 0)$处的切线方程.

4. 利用 $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$，$(\sin x)' = \cos x$，证明$(\cos x)' = -\sin x$.

5. 求下列函数的导数：

(1) $y = \ln \dfrac{1}{2x+1}$；　　(2) $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$.

阅 读

$f(ax+b)$的导数的一种解释

(1) 当 $a = 1$ 时，不妨设 $b<0$，设 $f'(x) = g(x)$. 由图 5-2-2 可知，若 $f'(x) = g(x)$，则

$$(f(x+b))' = g(x+b).$$

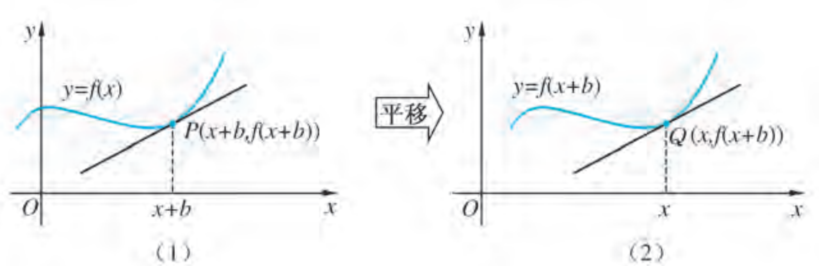


图 5-2-2

(2) 当 $a=-1$，$b=0$ 时，设 $f'(x)=g(x)$. 由图 5-2-3 可知，若 $f'(x)=g(x)$，则

$$(f(-x))'=-g(-x).$$

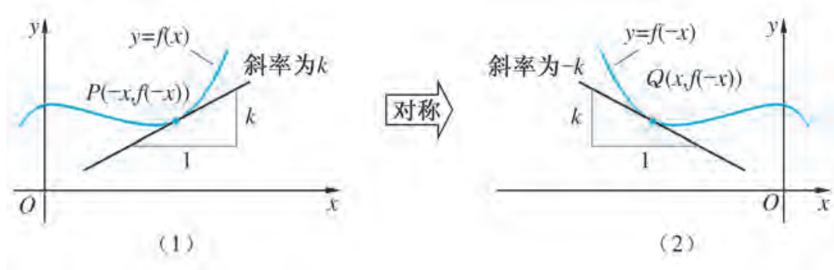


图 5-2-3

(3) 当 $a>0$，$b=0$ 时，设 $f'(x)=g(x)$. 由图 5-2-4 可知，若 $f'(x)=g(x)$，则

$$(f(ax))'=ag(ax).$$

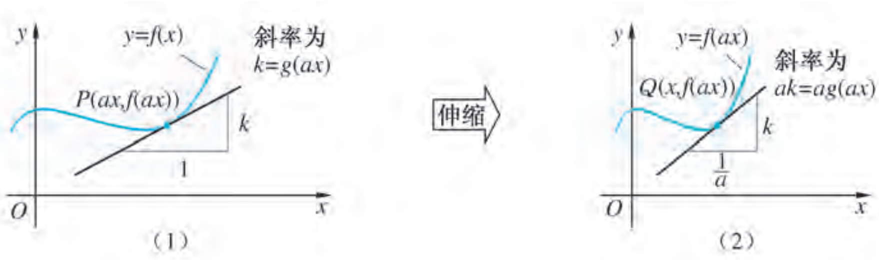


图 5-2-4

由(1)(2)(3)，你能得到什么结论？

习题 5.2

感受・理解

1. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=x^2-3x+1$；　　(2) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$；

(3) $f(x)=x+\sin x$；　　(4) $f(x)=x\cos x$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=2x+3^x$；　　(2) $f(x)=\log_2 x+x^2$；

(3) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$；　　(4) $f(x)=x^3\ln x$.

3. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=(2x+1)^5$；　　(2) $f(x)=\sin^2 x$；

(3) $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$；　　(4) $f(x)=\ln(x+1)$.

4. (1) 求曲线 $y=e^x$ 在 $x=0$ 处切线的方程；

(2) 过原点作曲线 $y=e^x$ 的切线，求切点的坐标.

5. 求曲线 $y=\dfrac{1}{2}x-\cos x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 处切线的方程.

6. 求曲线 $y=x^3+3x-8$ 在 $x=2$ 处切线的方程.

7. (1) 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$，分别求当 $x=2$，4 时 $f(x)$的导数值；

(2) 已知函数 $f(x)=x\ln x+2x^2-3$，分别求当 $x=1$，2 时 $f(x)$的导数值.

8. 已知函数 $f(x)=\sin x+\cos x$，$x\in(0,2\pi)$.

(1) 求 x_0，使 $f'(x_0)=0$；

(2) 解释(1) 中 x_0 及 $f'(x_0)$ 的意义.

9. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$；　　(2) $f(x)=(x^2+9)\left(x-\dfrac{3}{x}\right)$；

(3) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$；　　(4) $f(x)=x^2\cos x$.

10. 已知 $f(5)=5$，$f'(5)=3$，$g(5)=4$，$g'(5)=1$，求 $h(5)$ 及 $h'(5)$.

(1) $h(x)=3f(x)+2g(x)$；　　(2) $h(x)=f(x)g(x)+1$；

(3) $h(x)=\dfrac{f(x)+2}{g(x)}$.

11. 血液在血管中的流速满足关系式 $v(r)=k(R^2-r^2)$，其中 k 为常数，R 和 r 分别为血管的外径和内径(单位：cm). 现假定 $k=1\,000$，$R=0.2$ cm，求 $v(0.1)$ 及 $v'(0.1)$，并对所得结果作出解释.

思考・运用

12. 某港口在一天 24 h 内潮水的高度 S(单位：m)随时间 t(单位：h，$0\leqslant t\leqslant 24$)的变化近似满足关系式 $S(t)=3\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t+\dfrac{5\pi}{6}\right)$，求 18 点时潮水起落的速度.

13. 火车开出车站一段时间内，速度 v(单位：m/s)与行驶时间 t(单位：s)之间的关系是 $v(t)=0.4t+0.6t^2$.

(1) 求火车运动的加速度 a；

(2) 火车开出几秒时加速度为 2.8 m/s^2？

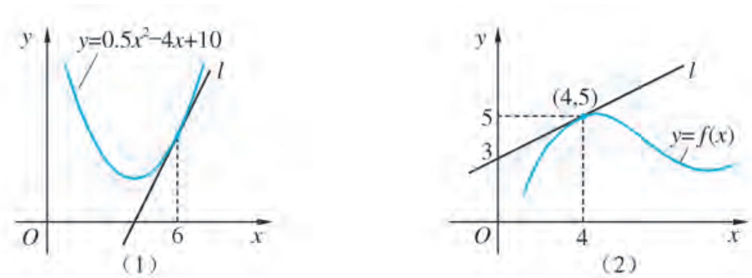
14. 质点的运动方程是 $S=5\sin t+2\cos t$.

(1) 求当 $t=5$ 时的速度；

(2) 求质点运动的加速度.

15. (1) 如图(1)，直线 l 是抛物线 $y=0.5x^2-4x+10$ 在 $x=6$ 处的切线，求直线 l 在 y 轴上的截距；

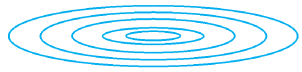
(2) 如图(2)，直线 l 是曲线 $y=f(x)$在 $x=4$ 处的切线，求 $f'(4)$.



(第 15 题)

探究·拓展

16. 如图,水波的半径以 50 cm/s 的速度向外扩张,当半径为 250 cm 时,圆面积的膨胀率是多少?



(第 16 题)

17. 设曲线 $y=x^2(x\geqslant 0)$,直线 $y=0$ 及 $x=t(t>0)$ 围成的封闭图形的面积为 $S(t)$,求 $S'(t)$.

5.3 导数在研究函数中的应用

我们知道，导数 $f'(x)$ 刻画了函数 $f(x)$ 在每一点处的变化趋势，而函数在每一点处的变化趋势可以反映函数的一些性质.

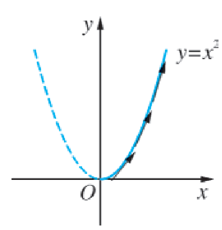
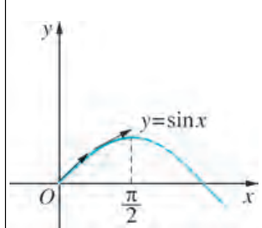
● 如何利用导数来研究函数的性质呢?

5.3.1 单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是增函数，那么对任意的 x_1，$x_2 \in (a, b)$，当 $x_1 < x_2$ 时，$f(x_1) < f(x_2)$，即 $x_1 - x_2$ 与 $f(x_1) - f(x_2)$ 同号，从而有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$，即 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. 这表明，函数的平均变化率与其单调性密切相关. 进一步猜想，函数的瞬时变化率（即导数）与其单调性也密切相关. 那么，

● 导数与函数的单调性有什么联系?

我们选几个具体的函数，考察一下它们的单调性与导数之间的关系：

函　数	$f(x)=2^x$ $(x\in\mathbf{R})$	$f(x)=x^2$ $(x\in(0,+\infty))$	$f(x)=\sin x$ $\left(x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$
函数的单调性	增函数	增函数	增函数
导数的正负	$f'(x)>0$	$f'(x)>0$	$f'(x)>0$
函数的图象			

观察上表，我们可以提出两个猜想：

(1) 如果 $f(x)$ 在某区间上单调递增，那么在该区间上 $f'(x) > 0$；

(2) 如果在某区间上 $f'(x) > 0$，那么 $f(x)$ 在该区间上单调递增.

思　考

试结合 $y=x^3$ 进行思考：如果 $f(x)$ 在某区间上单调递增，那么在该区间上必有 $f'(x)>0$ 吗？

在高等数学中，可以证明猜想(2)是正确的.

一般地，我们有下面的结论：

若在某个区间内，$f'(x)\geqslant 0$，且只在有限个点处 $f'(x)=0$，则在这个区间内，函数 $y=f(x)$ 单调递增；

若在某个区间内，$f'(x)\leqslant 0$，且只在有限个点处 $f'(x)=0$，则在这个区间内，函数 $y=f(x)$ 单调递减.

对于函数 $y=f(x)$，

如果在某区间上 $f'(x)>0$，那么 $f(x)$ 在该区间上单调递增，即 $f(x)$ 为该区间上的增函数；

如果在某区间上 $f'(x)<0$，那么 $f(x)$ 在该区间上单调递减，即 $f(x)$ 为该区间上的减函数.

上述结论可以用图 5-3-1 来直观理解.

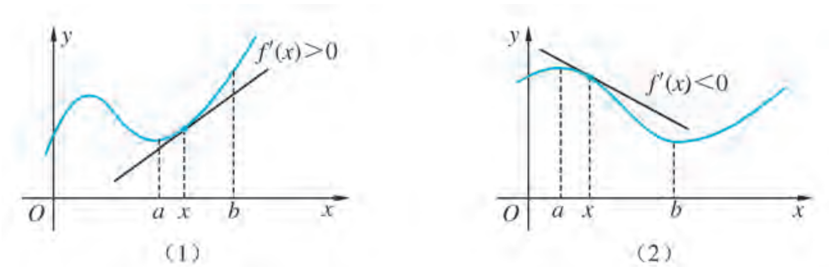


图 5-3-1

例 1　确定函数 $f(x)=x^2-4x+3$ 在哪个区间上是增函数，在哪个区间上是减函数.

解　由题设知，$f'(x)=2x-4$.

令 $f'(x)>0$，解得 $x>2$，因此，在区间 $(2,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 是增函数；

令 $f'(x)<0$，解得 $x<2$，因此，在区间 $(-\infty,2)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 是减函数(图 5-3-2).

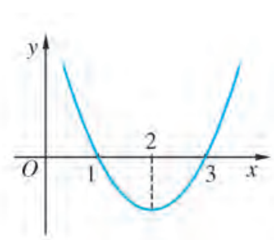


图 5-3-2

例 2　讨论函数 $f(x)=2x^3-6x^2+7$ 的单调性.

解　由题设知，$f'(x)=6x^2-12x$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=2$.

因此，在区间 $(-\infty,0)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；在区间 $(0,2)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；在区间 $(2,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，

$f(x)$ 单调递增(图 5－3－3).

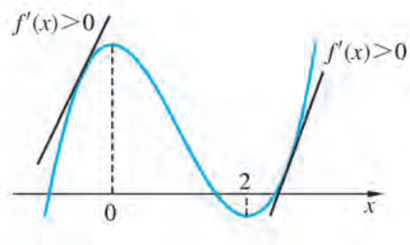


图 5－3－3

例 3 确定函数 $f(x)=\sin x\ (x\in(0,\ 2\pi))$ 的减区间.

解 $f'(x)=\cos x$.

令 $f'(x)<0$,即 $\cos x<0$. 又 $x\in(0,2\pi)$,所以 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

故所求的减区间是$\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

练 习

1. 确定下列函数的单调区间：
   (1) $y=x-x^2$； (2) $y=x-x^3$.
2. 讨论下列函数 $f(x)$的单调性：
   (1) $f(x)=kx+b$； (2) $f(x)=\frac{k}{x}$；
   (3) $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$.
3. 用导数证明：
   (1) $f(x)=e^x$ 在区间$(-\infty,\ +\infty)$ 上是增函数；
   (2) $f(x)=e^x-x$ 在区间$(-\infty,\ 0)$ 上是减函数.
4. (1) 证明函数 $y=-\ln x$ 在定义域上是减函数；
   (2) 证明函数 $y=\sin x$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函数.

5.3.2 极大值与极小值

观察图 5－3－4 中的函数图象,不难发现,函数图象在点 P 处从左侧到右侧由“上升”变为“下降”(函数由单调递增变为单调递减),这时在点 P 附近,点 P 的位置最高,即 $f(x_1)$比它附近点的函数值都要大. 我们称 $f(x_1)$为函数 $f(x)$的一个极大值.

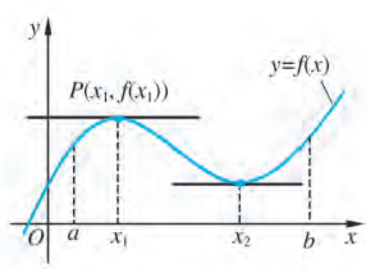


图 5－3－4

一般地,若存在 $\delta>0$,当 $x\in(x_1-\delta,\ x_1+\delta)$ 时,都有 $f(x)\leqslant f(x_1)$,则称 $f(x_1)$为函数 $f(x)$的一个极大值.

类似地,图中 $f(x_2)$为函数的一个极小值. 函数的极大值、极小值统称为函数的**极值**(extremum).

● 函数的极值与函数的导数有怎样的关系呢?

在这里,x_1 左(右)侧是指以 x_1 为右(左)端点的一个小区间.

继续观察图 5-3-4 中的函数图象,在函数取得极大值的 x_1 的左侧,函数单调递增,$f'(x)>0$;在 x_1 的右侧,函数单调递减,$f'(x)<0$;而在点 P 处的切线平行于 x 轴,即 $f'(x)=0$. 表 5-3-1 清楚地表明了极大值与导数之间的关系.

表 5-3-1

x	x_1 左侧	x_1	x_1 右侧
$f'(x)$	$f'(x)>0$	$f'(x)=0$	$f'(x)<0$
$f(x)$	↗	极大值 $f(x_1)$	↘

符号"↗""↘"分别表示"单调递增"和"单调递减".

类似地,极小值与导数之间的关系,如表 5-3-2 所示.

表 5-3-2

x	x_2 左侧	x_2	x_2 右侧
$f'(x)$	$f'(x)<0$	$f'(x)=0$	$f'(x)>0$
$f(x)$	↘	极小值 $f(x_2)$	↗

例 4 求 $f(x)=x^2-x-2$ 的极值.

解 $f'(x)=2x-1$. 令 $f'(x)=0$,解得 $x=\dfrac{1}{2}$.

列表如表 5-3-3 所示.

表 5-3-3

x	$\dfrac{1}{2}$左侧	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$右侧
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$	↗

因此,当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时,$f(x)$ 有极小值 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}$.

例 5 求 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+\frac{1}{3}$ 的极值.

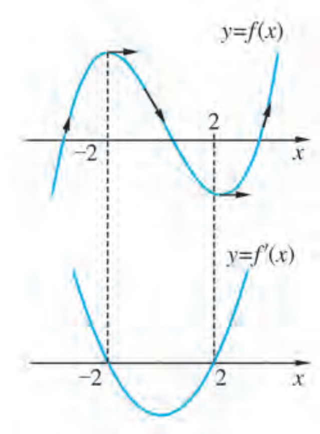
解 $f'(x)=x^2-4$. 令 $f'(x)=0$,解得 $x_1=-2$, $x_2=2$.

列表如表 5-3-4 所示.

表 5-3-4

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 $f(-2)$	↘	极小值 $f(2)$	↗

因此,当 $x=-2$ 时,$f(x)$ 有极大值 $f(-2)=\frac{17}{3}$;当 $x=2$ 时,$f(x)$ 有极小值 $f(2)=-5$(图 5-3-5).



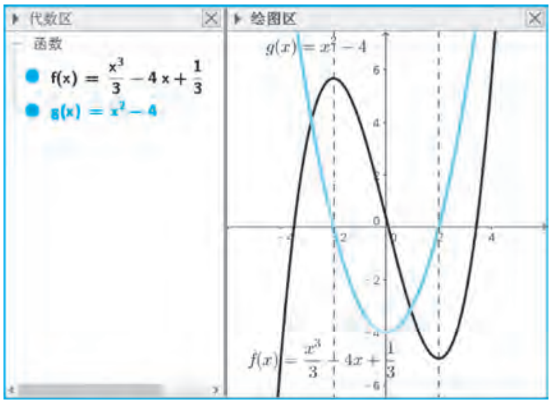


图 5-3-5

思 考

试联系函数 $y=x^3$ 思考:当 $f'(x_0)=0$ 时,能否肯定函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值?

练 习

1. 求下列函数的极值:

(1) $y=x^2-7x+6$;

(2) $y=x+\frac{1}{x}$.

2. 如果函数 $f(x)$有极小值 $f(a)$,极大值 $f(b)$,问:$f(a)$一定小于 $f(b)$吗? 试作图说明.

3. 根据下列条件,大致作出函数的图象:

(1) $f(4)=3$, $f'(4)=0$, 当 $x<4$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>4$ 时,$f'(x)<0$.

(2) $f(1)=1$, $f'(1)=0$,当 $x\neq 1$ 时,$f'(x)>0$.

4. 求函数 $y=x-\ln x$,$x\in(0,2)$ 的极值.

5.3.3 最大值与最小值

我们知道，如果在函数定义域 I 内存在 x_0，使得对任意的 $x \in I$，总有 $f(x) \leqslant f(x_0)$，那么 $f(x_0)$ 为函数在定义域上的最大值. 最大值是相对函数定义域整体而言的，如果存在最大值，那么最大值唯一.

● 如何求函数的最大(小)值?

观察函数 $y=f(x)$ 在区间$[a, b]$上的图象(图 5-3-6)可知，$f(x_2)$，$f(x_4)$ 是极大值，而函数 $f(x)$ 的最大值是 $f(b)$.

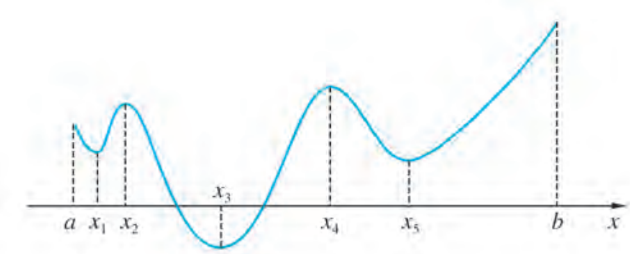


图 5-3-6

类似地，$f(x_1)$，$f(x_3)$，$f(x_5)$是极小值，而函数 $f(x)$的最小值是$f(x_3)$.

因此，求 $f(x)$在区间 $[a, b]$ 上的最大值与最小值可以分为两步：

第一步 求 $f(x)$在区间(a, b)上的极值；

第二步 将第一步中求得的极值与 $f(a)$，$f(b)$比较，得到$f(x)$在区间$[a, b]$上的最大值与最小值.

例 6 求 $f(x)=x^2-4x+3$ 在区间$[-1, 4]$上的最大值与最小值.

解 $f'(x)=2x-4$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=2$.

列表如表 5-3-5 所示.

表 5-3-5

x	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, 4)$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	↘	-1	↗	3

从上表可知，函数 $f(x)=x^2-4x+3$ 在区间$[-1,4]$上的最大值是 8，最小值是-1.

例 7 求 $f(x)=\frac{1}{2}x+\sin x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的最大值与最小值.

解 $f'(x)=\frac{1}{2}+\cos x$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=\frac{2\pi}{3}$，$x_2=\frac{4\pi}{3}$.

列表如表 5-3-6 所示.

表 5-3-6

x	0	$\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{2\pi}{3}$	$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$	$\frac{4\pi}{3}$	$\left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right)$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	π

从上表可知，函数 $f(x)=\frac{1}{2}x+\sin x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的最大值是 π，最小值是 0.

思 考

你能根据表 5-3-6 大致作出函数 $f(x)$ 的图象吗?

练 习

1. 对于函数 $f(x)$，如果 $f(x)\leqslant c$（c 为常数）对定义域中的每个自变量 x 均成立，那么 c 一定是函数 $y=f(x)$ 的最大值吗? 如果 $f(x)\leqslant f(x_0)$ 对定义域中的每个自变量 x 均成立，那么 $f(x_0)$ 一定是函数的最大值吗?
2. 如果函数 $f(x)$ 有最小值 $f(a)$，最大值 $f(b)$，问：$f(a)$ 一定小于 $f(b)$ 吗?
3. 求下列函数在所给区间上的最大值和最小值：
   (1) $f(x)=3x+2$，$x\in[-1, 3]$；
   (2) $f(x)=x^2-3x$，$x\in[-1, 3]$；
   (3) $f(x)=x+\frac{1}{x}$，$x\in\left[\frac{1}{3}, 3\right]$.
4. 求函数 $y=x-x^3$，$x\in[0, 2]$ 的值域.
5. 求函数 $y=x-\ln x$，$x\in(0,1]$ 的值域.

例 8 在边长为 60 cm 的正方形铁皮的四角切去边长相等的小正方形，再把它的边沿虚线折起（图 5-3-7），做成一个无盖的方底铁皮箱. 当箱底边长为多少时，箱子容积最大? 最大容积是多少?

解 设箱底边长为 x cm，则箱高为

$$h=\frac{60-x}{2}\ (0<x<60),$$

箱子的容积为

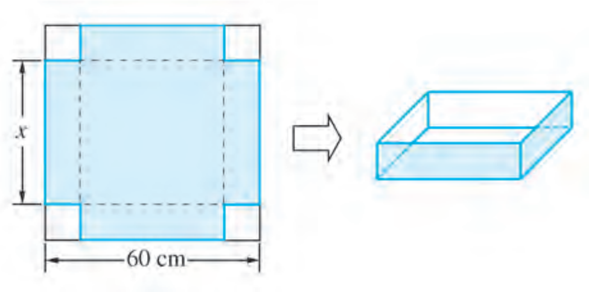


图 5-3-7

$$V(x)=x^2h=30x^2-\frac{1}{2}x^3(0<x<60).$$

$$V'(x)=60x-\frac{3}{2}x^2\text{，令 }V'(x)=0\text{，解得}$$

$$x_1=0(\text{舍}),\ x_2=40.$$

当 $x\in(0, 40)$ 时，$V'(x)>0$；当 $x\in(40, 60)$ 时，$V'(x)<0$.

所以，函数 $V(x)$ 在 $x=40$ 处取得极大值，这个极大值就是函数 $V(x)$ 的最大值，即

$$V(40)=30\times 40^2-\frac{1}{2}\times 40^3=16\ 000.$$

答 当箱子底边长等于 40 cm 时，箱子容积最大，最大值为 16 000 cm^3.

例 9 某种圆柱形饮料罐的容积一定，如何确定它的高与底半径，才能使它的用料最省？

解 如图 5-3-8，设圆柱的高为 h，底半径为 R，则表面积

$$S(R)=2\pi Rh+2\pi R^2.$$

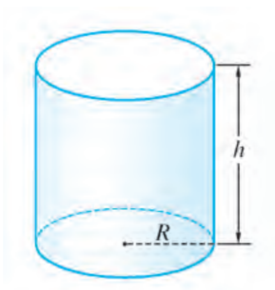


图 5-3-8

又 $V=\pi R^2h$（定值），则 $h=\frac{V}{\pi R^2}$，所以

$$S(R)=2\pi R\cdot\frac{V}{\pi R^2}+2\pi R^2=\frac{2V}{R}+2\pi R^2(R>0).$$

$S'(R)=-\frac{2V}{R^2}+4\pi R$，令 $S'(R)=0$，解得 $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，从而

$$h=\frac{V}{\pi R^2}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=2R,$$

即 $h=2R$.

当 $R<\frac{h}{2}$ 时，$S'(R)<0$；当 $R>\frac{h}{2}$ 时，$S'(R)>0$.

因此，当 $h=2R$ 时，$S(R)$ 取得极小值，且是最小值.

答　当罐高与罐底的直径相等时，用料最省.

例 10　在经济学中，生产 x 单位产品的成本称为成本函数，记为$C(x)$，出售 x 单位产品的收益称为收益函数，记为 $R(x)$，$R(x)-C(x)$称为利润函数，记为 $P(x)$.

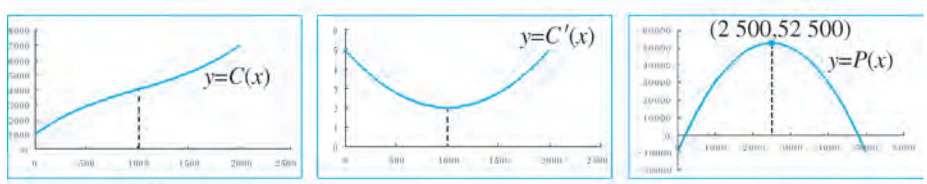
（1）如果 $C(x)=10^{-6}x^3-0.003x^2+5x+1\,000$，那么生产多少单位产品时，边际成本 $C'(x)$ 最低？

（2）如果 $C(x)=50x+10\,000$，产品的单价 $p(x)=100-0.01x$，那么怎样定价可使利润最大？

解　（1）$C'(x)=3\times10^{-6}x^2-0.006x+5$，记 $g(x)=C'(x)$.

由
$$g'(x)=6\times10^{-6}x-0.006=0,$$
解得 $x=1\,000$.

结合 $C'(x)$的图象（图 5-3-9(2)）可知，当 $x=1\,000$ 时，边际成本最低.



（1）　　（2）　　（3）

图 5-3-9

（2）由 $p(x)=100-0.01x$，得收益函数
$$R(x)=x(100-0.01x),$$
则利润函数
$$\begin{aligned}P(x)&=R(x)-C(x)\\&=x(100-0.01x)-(50x+10\,000)\\&=-0.01x^2+50x-10\,000.\end{aligned}$$

由 $P'(x)=-0.02x+50=0$，解得 $x=2\,500$.

结合图 5-3-9(3)可知，当 $x=2\,500$ 时，利润最大，此时
$$p(2\,500)=100-0.01\times2\,500=75.$$

答 生产 1 000 个单位产品时，边际成本最低；当产品的单价为 75 时，利润最大.

一般地，为使利润函数 $P(x)=R(x)-C(x)$ 最大，生产规模应确定为 $x=a$，且 $P'(a)=0$，即 $R'(a)=C'(a)$.

用图象来表示有下列 3 种形式(图 5－3－10)，这就是如何确定生产规模的一般数学模型.

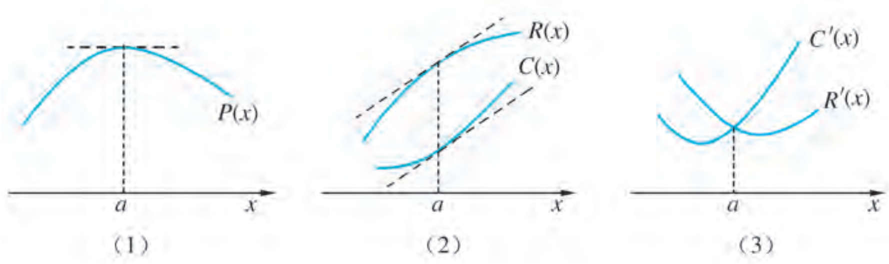


图 5－3－10

练　习

1. 把长为 60 cm 的铁丝围成矩形，当长、宽各为多少时矩形的面积最大?
2. 把长为 100 cm 的铁丝分成两段，各围成一个正方形，怎样分才能使两个正方形的面积之和最小?
3. 做一个容积为 256 m^3 的方底无盖水箱，它的高为多少时材料最省?
4. 为了保证某隧道内的行车安全，交通部门规定，隧道内的车距 d(单位：m)正比于车速 v(单位：km/h)的平方与自身长 l(单位：m)的积，且车距不得小于半个车身长. 而当车速为 60(km/h)时，车距为 1.44 个车身长. 当车速多大时，隧道的车流量最大?

习题 5.3

感受・理解

1. 设 $f(x)$是减函数，试确定$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $(x\neq x_0)$的符号.
2. 确定下列函数的单调区间：

   (1) $y=-4x+2$；　　(2) $y=x\ln x$；

   (3) $y=\sin x+\cos x$；　　(4) $y=x^2(x-3)$.
3. 求下列函数的极值：

   (1) $y=2x^2-x^4$；　　(2) $y=\dfrac{x}{x^2+3}$；

   (3) $y=x-2\cos x$；　　(4) $y=e^x-ex$.
4. 求下列函数在所给区间上的最大值和最小值：

   (1) $y=x^2-2x$，$x\in[0,3]$；

   (2) $y=\dfrac{x-1}{x+2}$，$x\in[0,2]$；

   (3) $y=\dfrac{1}{2}x-\cos x$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

5. 分别根据下列条件，确定$\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\Delta x\right)-\cos\dfrac{\pi}{4}}{\Delta x}$的符号：

(1) $0<\Delta x<\dfrac{\pi}{4}$；

(2) $-\dfrac{\pi}{4}<\Delta x<0$.

6. 一杯 80℃ 的热茶置于客厅桌面上，热茶的温度 T(单位：℃) 随着时间 t(单位：min) 的增加而逐渐下降. 设 T 与 t 的函数关系为 $T=f(t)$，若 $f'(3)=-3$，试解释其实际意义.

7. 已知某养猪场的固定成本是 20 000 元，每年最大规模的养殖量为 600 头，且每养 1 头猪，成本增加 100 元，养 x 头猪的收益函数为 $R(x)=400x-\dfrac{1}{2}x^2$，记 $C(x)$，$P(x)$ 分别为养 x 头猪的成本函数和利润函数.

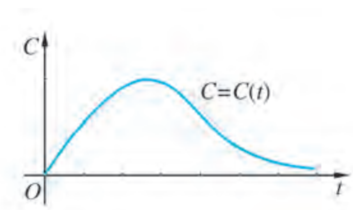
(1) 分别求 $C(x)$，$P(x)$ 的表达式；

(2) 当 x 取何值时，$P(x)$ 最大？

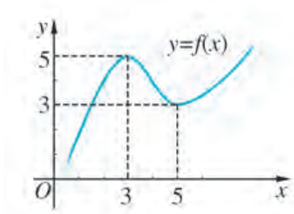
8. 甲、乙两地相距 s(单位：km)，汽车从甲地以速度 v(单位：km/h) 匀速行驶到乙地. 已知汽车每小时的运输成本由固定成本和可变成本组成，固定成本为 a 元，可变成本与速度 v 的平方成正比，比例系数为 k. 为使全程运输成本最小，汽车应以多大速度行驶？

思考·运用

9. 当某种针剂药注入人体后，血液中药的浓度 C 与时间 t 的关系 $C=C(t)$ 的图象如图所示，试解释此图.



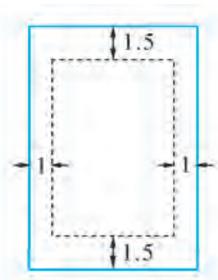
(第 9 题)



(第 10 题)

10. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，试作出 $y=f'(x)$ 的草图.

11. 出版社出版某一读物，1 页上所印文字占去 150 cm²，上、下边要留 1.5 cm 空白，左、右两侧要留 1 cm 空白. 出版商为降低成本，应选用怎样尺寸的纸张？



(第 11 题)

12. 一列车队以速度 v(单位：km/h) 行进，每辆车长 5 m，两车之间的合适间距为 $0.18v+0.006v^2$(m). 问：当车速 v 为多少时，单位时段内通过的汽车数量最多？

13. 求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{1}{x+1}+x$, $x\in[1, 3]$；　　(2) $y=x^3-3x^2+5$, $x\in[-2, 3]$；

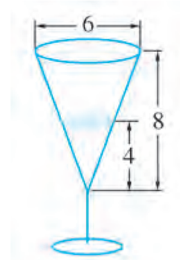
(3) $y=x+\sin x$, $x\in[0, 2\pi]$；　　(4) $y=2x^2-\ln x$.

14. (1) 求内接于半径为 R 的圆且面积最大的矩形；

(2) 求内接于半径为 R 的球且体积最大的圆柱.

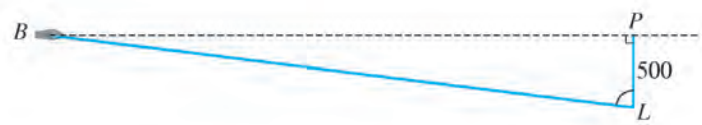
探究·拓展

15. 如图，酒杯的形状为倒立的圆锥. 杯深 8 cm，上口宽 6 cm. 水以 20 cm^3/s 的流量倒入杯中，当水深 4 cm 时，求水升高的瞬时变化率(精确到 0.01).



(第 15 题)

16. 如图，船以定速直行，航线距灯塔 L 的最近距离为 500 m. 已知灯塔对小船现在的位置 B 及小船航线与灯塔的最近点 P 的张角 $\angle BLP=83°$，且该角正以 0.8°/min 的比率减小，求小船的速度.



(第 16 题)

17. 探究一元二次方程 $x^2+x-1=0$ 的求解问题，这是经典的求黄金分割的方程式. 令 $f(x)=x^2+x-1$，对抛物线 $y=f(x)$，持续实施下面“牛顿切线法”的步骤：

在点(1, 1)处作抛物线的切线，交 x 轴于点 $(x_1, 0)$；

在点 $(x_1, f(x_1))$ 处作抛物线的切线，交 x 轴于点 $(x_2, 0)$；

在点 $(x_2, f(x_2))$ 处作抛物线的切线，交 x 轴于点 $(x_3, 0)$；

……

得到一个数列 $\{x_n\}$. 回答下列问题：

(1) 求 x_1 的值；

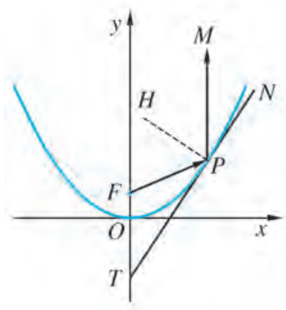
(2) 设 $x_{n+1}=g(x_n)$，求 $g(x_n)$ 的解析式；

(3) 用“二分法”求方程的近似解，给出前四步结果. 比较“牛顿切线法”和“二分法”的求解速度.

18. (阅读题)圆锥曲线的光学性质(续).

在圆锥曲线部分，我们曾介绍了圆锥曲线的光学性质，现以抛物线为例，予以证明.

抛物线的光学性质如下：位于焦点 F 的光源所射出的光线 FP，经抛物线(在实际问题中是旋转抛物面)上的任一点 $P(x_0, y_0)$ 反射后，反射光线 PM 与抛物线的轴平行.



（第 18 题）

根据光学中的反射原理，光线的反射角等于入射角. 在图中，设 PT 是抛物线在点 P 处的切线（T 为切线与 y 轴的交点），$PH \perp PT$，则有 $\angle MPH = \angle FPH$. 要证明反射光线 PM 平行于对称轴（y 轴），只需证 $\angle FTP = \angle MPN$ 即可.

设抛物线的方程为 $y = ax^2 (a > 0)$，则焦点 F 的坐标为 $\left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$. 根据抛物线的定义知 $PF = y_0 + \dfrac{1}{4a}$.

又因为 $y' = 2ax$，所以切线 PN 的斜率为 $2ax_0$，于是切线 PN 的方程为

$$y - y_0 = 2ax_0(x - x_0).$$

令 $x = 0$，得 $$y = y_0 - 2ax_0^2 = -y_0,$$

则 $$FT = y_0 + \frac{1}{4a},$$

所以 $PF = FT$，从而 $$\angle FTP = \angle FPT.$$

又因为 $$\angle FPT = \angle MPN,$$

所以 $$\angle FTP = \angle MPN.$$

故 PM 平行于 y 轴.

这就证明了抛物线的光学性质.

应用与建模

三次样条模型

考察图 1 中的数据，怎样描出一条光滑的曲线连接这些点？

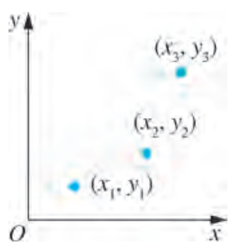


图 1

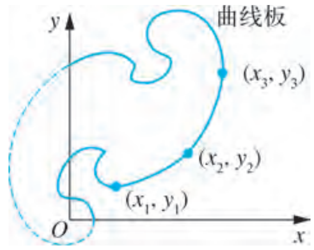


图 2

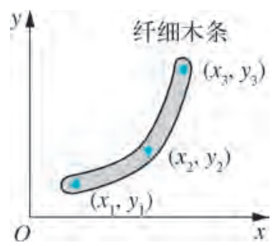


图 3

方法 1 利用曲线板工具（图 2），在两个数据点间合理地选择曲线，并使其光滑地转接到下一个数据对的另一条.

方法 2 取一根非常纤细的木条（称为样条 spline），在每一个数据点钉住它（图 3）. 三次样条模型的基本思想同此，只是在光滑化的方式上，在连续的数据点对间使用不同的三次多项式.

因为多项式容易求导，所以在构造经验模型追踪数据的趋势时，常使用多项式. 考虑到高次多项式在邻近数据区间的端点处摆动的倾向，且系数对数据中小的变化太敏感，通常采用低次多项式进行光滑化.

在连续的数据点对间使用三次多项式追踪数据的趋势，既保证了基本关系的特征，同时又减少了摆动的倾向和数据变化的敏感性.

（1）三次样条模型

如图 4，在区间 $[x_1, x_2]$ 和 $[x_2, x_3]$ 上，分别定义样条函数：

$$S_1(x)=a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3, x\in[x_1, x_2];$$
$$S_2(x)=a_2+b_2x+c_2x^2+d_2x^3, x\in[x_2, x_3].$$

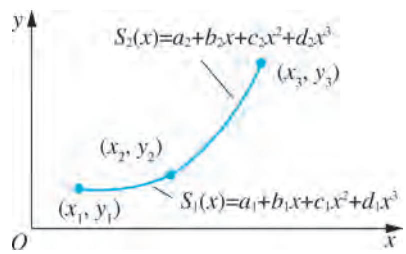


图 4　三阶样条函数

首先，每一样条通过该样条的定义区间的两个数据点：

$$y_1=S_1(x_1)=a_1+b_1x_1+c_1x_1^2+d_1x_1^3, \quad ①$$
$$y_2=S_1(x_2)=a_1+b_1x_2+c_1x_2^2+d_1x_2^3, \quad ②$$
$$y_2=S_2(x_2)=a_2+b_2x_2+c_2x_2^2+d_2x_2^3, \quad ③$$
$$y_3=S_2(x_3)=a_2+b_2x_3+c_2x_3^2+d_2x_3^3. \quad ④$$

其次，要求样条系统的光滑性，在内部数据点邻接的一阶导数必

须匹配：

即 $S_1'(x_2)=S_2'(x_2)$，

$$b_1+2c_1x_2+3d_1x_2^2=b_2+2c_2x_2+3d_2x_2^2. \quad ⑤$$

同时还要求在每一内部数据点邻接的二阶导数必须匹配：

即 $S''_1(x_2)=S_2''(x_2)$，

$$2c_1+6d_1x_2=2c_2+6d_2x_2. \quad ⑥$$

为了确定待定系数，仍需附加两个独立的方程. 一种假设是样条在外侧端点处的一阶导数没有变化（二阶导数为零）：

$$S_1''(x_1)=2c_1+6d_1x_1=0, \quad ⑦$$
$$S_2''(x_3)=2c_2+6d_2x_3=0. \quad ⑧$$

这样产生的样条称为自然样条（natural spline），如图 5 所示.

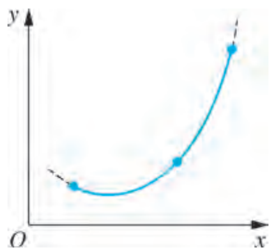


图 5　自然样条

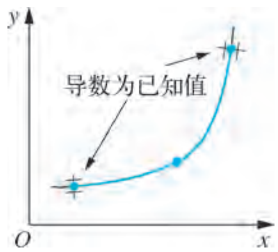


图 6　强制样条

另一种假设是在外侧端点处的一阶导数的值是已知的，即在外侧端点处的一阶导数要求与这些值匹配. 若在外侧端点处的导数为 $f'(x_1)$和$f'(x_3)$，则

$$S_1'(x_1)=b_1+2c_1x_1+3d_1x_1^2=f'(x_1),$$
$$S_2'(x_3)=b_2+2c_2x_3+3d_2x_3^2=f'(x_3).$$

这样产生的样条称为强制样条（clamped spline），如图 6 所示.

(2) 示例

试建立过 $P_1(1,5)$，$P_2(2,8)$，$P_3(3,25)$三点的自然三次样条模型.

解　将三点的坐标代入①～⑧，得

$$\begin{cases} a_1+b_1+c_1+d_1=5, \\ a_1+2b_1+4c_1+8d_1=8, \\ a_2+2b_2+4c_2+8d_2=8, \\ a_2+3b_2+9c_2+27d_2=25, \\ b_1+4c_1+12d_1=b_2+4c_2+12d_2, \\ 2c_1+12d_1=2c_2+12d_2, \\ 2c_1+6d_1=0, \\ 2c_2+18d_2=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a_1=2, \\ b_1=10, \\ c_1=-10.5, \\ d_1=3.5, \\ a_2=58, \\ b_2=-74, \\ c_2=31.5, \\ d_2=-3.5. \end{cases}$$

因此,过 P_1, P_2, P_3 三点的一个自然三次样条模型为

区 间	样 条 模 型
[1, 2]	$S_1(x)=2+10x-10.5x^2+3.5x^3$
[2, 3]	$S_2(x)=58-74x+31.5x^2-3.5x^3$

拟合图形如图 7 所示.

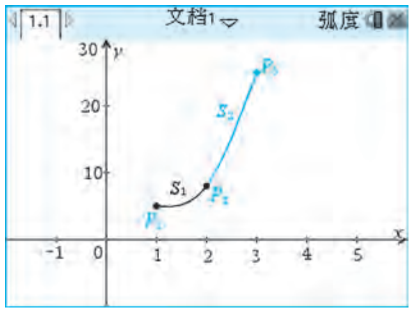


图 7

样条插值是工业设计中常用的得到平滑曲线的插值方法,三次样条模型是其中用得较为广泛的一种.

(3) 尝试

自己选三个点,利用上述方法建立相应的模型.

阅 读

微积分的建立

微积分是研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支.

微积分的产生和发展被誉为"近代技术文明产生的关键事件之一". 微积分的建立,无论是对数学还是对其他科学以至于技术的发展,都产生了巨大的影响,充分显示了人类的数学知识对于人的认识发展和改造世界的能力的巨大促进作用.

积分的思想产生得很早,公元前 200 多年,阿基米德(Archimedes,约公元前 287—前 212)就用积分的观点求得球体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$. 他用球体"薄片"的叠加与球的外切圆柱及相关圆锥"薄片"的叠加,并用杠杆原理得到球的体积公式. 公元 5 世纪,中国数学家祖冲之、祖暅父子提出了"幂势既同,则积不容异",也是积分概念的雏形.

微分观念的发生比积分大概迟了 2 000 年. 公元 16 世纪,伽利略发现了自由落体的运动规律 $S=\frac{1}{2}gt^2$, 落体的瞬时速度近似于

$$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}\approx gt,$$

当 Δt 很小时,这个比值接近于时刻 t 的瞬时速度,这是导数的启蒙.

同时，在探求曲线的切线的时候，人们发现，切线是割线的近似，割线的斜率是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

当 Δx 很小时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$应该是切线斜率的近似，求曲线的切线斜率，是产生导数观念的直接动因.

17 世纪，笛卡儿(R. Descartes，1596—1650)建立了坐标系，使几何图形能够用函数来表示，从而为研究函数及其变化率提供了有力的工具.

在 17 世纪后半叶，牛顿(I. Newton，1642—1727)和莱布尼茨(G. W. Leibniz，1646—1716)总结了诸多数学家的工作之后，分别独立建立了微积分学. 牛顿和莱布尼茨对微积分学最突出的贡献是建立了微积分基本定理

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a),$$

它把原以为不相干的两个事物紧密联系在一起，揭示了微分与积分的逆运算关系. 所不同的是，牛顿创立的微积分有深刻的力学背景，他更多的是从运动变化的观点考虑问题，把力学问题归结为数学问题. 而莱布尼茨主要是从几何学的角度考虑，他创建的微积分的符号以及微积分的基本法则，对以后微积分的发展有极大的影响.

19 世纪，柯西(A. L. Cauchy，1789—1857)和魏尔斯特拉斯(K. Weierstrass，1815—1897)为微积分学奠定了坚实的基础，使微积分学成为一套完整的、严谨的理论体系.

微积分的建立充分说明，数学来源于实践，又反过来作用于实践. 数学的内容、思想、方法和语言已成为现代文化的重要组成部分.

写 作

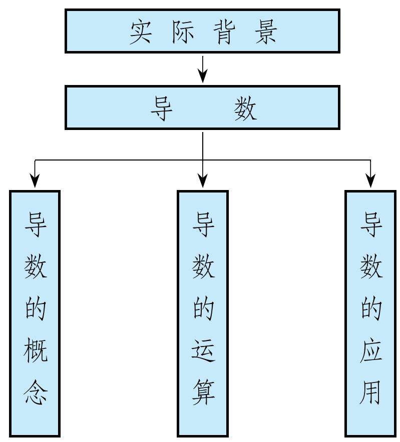
微积分的创立与发展

收集对微积分的创立和发展起重大作用的有关资料，包括一些重要历史人物和事件(牛顿、莱布尼茨、柯西、魏尔斯特拉斯等). 个人或者小组合作，形成一篇有关微积分创立与发展的研究报告，论述微积分发明的过程，重要的结果，微积分发展中的重要人物、事件及其对人类文明的贡献，在班级中进行交流.

本章回顾

本 章 概 览

本章首先通过实例由平均变化率、瞬时变化率引入了导数的概念. 然后对基本初等函数的导数，函数的和、差、积、商的导数，以及简单的复合函数的导数作了初步研究和介绍，并运用导数处理了一些简单的实际问题.



导数的引入源于“局部以直代曲”这一辩证思想，微积分的产生被誉为近代技术文明发展过程中的关键事件之一，是人类智慧的伟大结晶. 体验和感悟微积分基本思想和方法是学习本章的要点，其认识宏观与微观世界的科学方法对人们科学观的形成有着重大意义.

复 习 题

感受・理解

1. 设球的半径以 2 cm/s 的速度膨胀.

(1) 当半径为 5 cm 时，表面积对时间的变化率是多少？

(2) 当半径为 8 cm 时，体积对时间的变化率是多少？

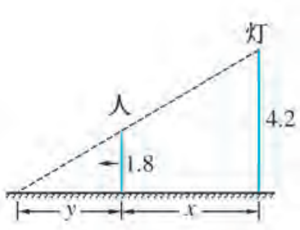
2. 在某介质中一小球下落，t s 时的高度为 $h=1.5-0.1t^2$(单位：m)，当 $t=3$ 时，求球的高度、速度和加速度.

3. 如图，身高为 1.8 m 的人以 1.2 m/s 的速度离开路灯，路灯高 4.2 m.

(1) 求身影的长度 y(单位：m)与人距路灯的距离 x(单位：m)之间的关系；

(2) 解释身影长的变化率与人步行速度的关系；

(3) 当 $x=3$ 时，求身影长的变化率.



（第 3 题）

4. 分别求曲线 $y=-x^2+2x$ 在点 $A(1, 1)$ 及点 $B(-1, -3)$ 处的切线方程.

5. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^5$；　　(2) $y=x^2+2\sin x$；

(3) $y=\tan x$；　　(4) $y=\dfrac{1}{1+\cos x}$.

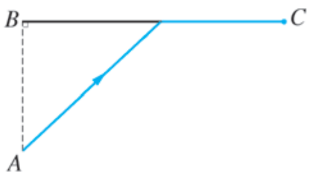
6. 求下列函数的导数：

(1) $y=\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$；　　(2) $y=xe^{2x}$；

(3) $y=2^x+\ln(1-5x)$；　　(4) $y=e^{-x}\cos 3x$.

7. (1) 求函数 $y=2x^2-x^4$ 的极值；

(2) 求函数 $y=3x^3-9x+5$ 在区间$[-2, 2]$上的最大值与最小值.



(第 8 题)

8. 如图，已知海岛 A 到海岸公路 BC 的距离 AB 为 50 km，B，C 间的距离为 100 km，从 A 到 C，先乘船，船速为 25 km/h，再乘汽车，车速为 50 km/h. 问：登陆点选在何处，所用时间最少？

思考・运用

9. 如图，煤场的煤堆形如圆锥，设圆锥母线与底面所成角为 α.

(1) 高 h 与半径 r 有什么关系？

(2) 传输带以 0.3 m^3/min 送煤，当半径 $r=1.7$ m时，求 r 对时间 t 的变化率.

(第 9 题)

10. 已知两曲线 $f(x)=\cos x$，$g(x)=2\sin 3x$，$x\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(1) 用计算机(器)求两曲线的交点坐标；

(2) 求两曲线在交点处的夹角(即交点处两曲线的切线的夹角).

11. 求下列函数的导数：

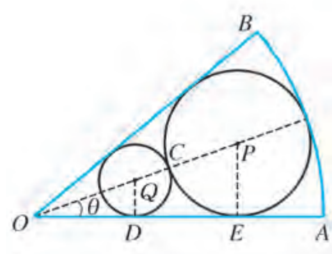
(1) $y=\sin^4 3x\cos^3 4x$；

(2) $y=2(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})$.

12. 求函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 的单调区间.

探究・拓展

13. 如图，在半径为常量 r、圆心角为变量 $2\theta(0<2\theta<\pi)$ 的扇形 OAB 内作一内切圆 P，再在扇形内作一个与扇形两半径相切并与圆 P 外切的小圆 Q，求圆 Q 半径的最大值.



(第 13 题)

本章测试

一、填空题

1. 已知函数 $f(x)=x^2-x$，当 $h\to 0$ 时，$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}\to$________.

2. 函数 $y=\sin x$ 的图象在点$(\pi,0)$处的切线方程为________________.

3. 函数 $y=\sin x+2x$ $(x\in[0,\pi])$的最大值为________.

4. 当函数 $f(x)=\dfrac{5}{x}+\ln x$ 取得最小值时，x 的值为________.

5. 设 a 为实数，若函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+1$ 在 $x=-4$ 处取得极大值，则 a 的值为________.

6. 已知函数 $f(x)=\tan x$，那么 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$的值为________.

二、选择题

7. 函数 $f(x)=x^2-\sin x$ 在区间$[0,\pi]$上的平均变化率为(　　).

A. 1　　B. 2

C. π　　D. π^2

8. 函数 $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}-1$ 在区间$(-\infty,0)$上(　　).

A. 有最大值，无最小值　　B. 有最小值，无最大值

C. 既有最大值，又有最小值　　D. 既无最大值，又无最小值

9. 对于函数 $f(x)=x\ln x$，若 $f'(x_0)=2$，则实数 x_0的值为(　　).

A. e^2　　B. e

C. $\dfrac{\ln 2}{2}$　　D. $\ln 2$

10. 设 $a\in\mathbf{R}$，若函数 $y=e^{ax}+3x(x\in\mathbf{R})$ 有大于零的极值点，则(　　).

A. $a>-3$　　B. $a<-3$

C. $a>-\dfrac{1}{3}$　　D. $a<-\dfrac{1}{3}$

三、解答题

11. 求下列函数的导数：

(1) $y=\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{x}$；　　(2) $y=x\ln(2x+1)$.

12. 试确定函数 $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$ 的单调区间.

13. 求证：当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$x>\sin x$.

14. 已知函数 $f(x)=x^3-ax^2$，$a\in\mathbf{R}$，且 $f'(1)=3$. 求：

(1) a 的值及曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,f(1))$处的切线方程；

(2) 函数 $f(x)$ 在区间$[0,2]$上的最大值.

15. 已知一个圆锥的母线长为 20cm，当圆锥的体积最大时，圆锥的高为多少？

专题　数学建模与数学探究

在学习数学的过程中，形成良好的数学应用意识是非常重要的. 应用意识有两个方面的含义：一方面，有意识地利用数学的概念、原理和方法解释现实世界中的现象，解决现实世界中的问题；另一方面，认识到现实生活中蕴涵着大量与数量和图形有关的问题，这些问题可以抽象成数学问题，用数学的方法予以解决. 开展数学建模活动是增强数学应用意识的有效途径.

案例分析

了解自己的父母或亲友在贷款买房或购车时是否遇到过类似的问题.

1. 某报的理财专栏声称："等额本金"还款法要比"等额本息"还款法合算，理由是等额本金还贷所支付的利息少. 该文举例说，如果某人商业贷款 25 万元购房，20 年还清(年利率 5.04%)，那么等额本金还款法要比等额本息还款法少还利息 20 775.45 元. 你认为上述观点是否正确？给出你的理由.

◆ 理解问题

向银行存款或贷款是最常见的金融活动，有关问题可以运用数列知识来解决. 同时，我们应该了解银行的有关专用术语和基本知识，以便更好地分析和解决有关金融问题.

"等额本息"还款法是指贷款人每月按相等的金额偿还贷款本息. 第 4 章"数列"4.3.3 节"等比数列的前 n 项和"中的例 5 即是等额本息还款法的例子.

"等额本金"还款法是指贷款人将本金平均分摊到每个月内，同时付清上一交易日至本次还款日之间的利息.

银行是按复利计算贷款利息的，且结算周期是月，月利率=年利率/12. 在分析与计算时要注意货币的时间价值，不同时间点的货币不能直接相加(参阅第 4 章"数列"链接"现值与终值").

◆ 简化与假设

假设银行在贷款期 n 个月内的贷款利率不变，月利率为 r(年利率/12)，贷款额为 Q(元)，贷款人在月初贷款后的每个月末还款.

◆ 建立模型

(1) 等额本息还款法

设月初贷款额为 Q(元)，每月底的还款额均为 A，按还清贷款时的时间点(第 n 个月末)计算，得

$$A+A(1+r)+A(1+r)^2+\cdots+A(1+r)^{n-1}=Q(1+r)^n.$$

运用等比数列求和公式，化简得

$$A=\frac{Qr(1+r)^n}{(1+r)^n-1}=\frac{Qr}{1-(1+r)^{-n}}.$$

可用 Excel 中“=PMT(5.04%/12，240，250 000)”直接计算 A.

本例中，$Q=250\ 000$，$n=240$，$r=5.04\%/12=0.004\ 2$，代入计算得 $A\approx1\ 655.418\ 56$(元).

因此，贷款人按等额本息还款法还贷，每月末应还款 1 655.42 元.

(2) 等额本金还款法

按等额本金还款法还款，第 i 个月末还款额 A_i 由两部分组成. 一部分是本金分摊到每个月内的金额，即$\frac{Q}{n}$；另一部分是所剩贷款一个月的利息，即 $\left[Q-\frac{Q}{n}(i-1)\right]r$. 因此，

$$A_i=\frac{Q}{n}+\left[Q-\frac{Q}{n}(i-1)\right]r(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

本例中，第 1 个月末的还款额为

$$A_1=\frac{250\ 000}{240}+250\ 000\times0.004\ 2\approx2\ 091.67(\text{元})；$$

第 2 个月末的还款额为

$$A_2=\frac{250\ 000}{240}+\left(250\ 000-\frac{250\ 000}{240}\right)\times0.004\ 2$$
$$\approx2\ 087.29(\text{元})；$$

……

第 240 个月末的还款额为

$$A_{240}=\frac{250\ 000}{240}+\left(250\ 000-\frac{250\ 000}{240}\times239\right)\times0.004\ 2$$
$$\approx1\ 046.04(\text{元}).$$

借助 Excel，可以快捷地得到 240 个月的还款额(图 1).

◆ 比较及分析

不论是用“等额本金”还款法还是用“等额本息”还款法，每个月末还款额的时间点均不同，如果简单地将其相加，那么就会得出“等额本金还款法比等额本息还款法所付的利息少”这样的错误：

按等额本息还款，若将每个月末的还款额相加，则有

$$S_1=1\ 655.418\ 56\times240=397\ 300.454\ 4(\text{元}),$$

所付利息总额为

$$I_1=397\ 300.454\ 4-250\ 000=147\ 300.454\ 4(\text{元}).$$

在 B1 内键入“=250 000/240+(250 000−250 000/240*(A1−1))*5.04%/12”.

A	B					
1	2091.667	25	1986.667	……	217	1146.667
2	2087.292	26	1982.292		218	1142.292
3	2082.917	27	1977.917		219	1137.917
4	2078.542	28	1973.542		220	1133.542
5	2074.167	29	1969.167		221	1129.167
6	2069.792	30	1964.792		222	1124.792
7	2065.417	31	1960.417		223	1120.417
8	2061.042	32	1956.042		224	1116.042
9	2056.667	33	1951.667		225	1111.667
10	2052.292	34	1947.292		226	1107.292
11	2047.917	35	1942.917		227	1102.917
12	2043.542	36	1938.542		228	1098.542
13	2039.167	37	1934.167		229	1094.167
14	2034.792	38	1929.792		230	1089.792
15	2030.417	39	1925.417		231	1085.417
16	2026.042	40	1921.042		232	1081.042
17	2021.667	41	1916.667		233	1076.667
18	2017.292	42	1912.292		234	1072.292
19	2012.917	43	1907.917		235	1067.917
20	2008.542	44	1903.542		236	1063.542
21	2004.167	45	1899.167		237	1059.167
22	1999.792	46	1894.792		238	1054.792
23	1995.417	47	1890.417		239	1050.417
24	1991.042	48	1886.042		240	1046.042

图 1 用 Excel 按等额本金还款法计算 240 个月的还款额

按等额本金还款，对图 1 中 240 个月的还款额求和，得

$$S_2=376\ 525(\text{元}).$$

所付利息总额为

$$I_2=376\ 525-250\ 000=126\ 525(\text{元}).$$

于是，$I_1-I_2=147\ 300.454\,4-126\ 525\approx 20\ 775.45$(元). 从而得出“等额本金还款法要比等额本息还款法少还利息 20 775.45 元”的错误结论.

事实上，两种还款法所付利息总额均为

$$250\ 000(1+5.04\%/12)^{240}-250\ 000\approx 433\ 584.33(\text{元}).$$

一般地，对于等额本息还款法，有

$$A(1+r)^{n-1}+A(1+r)^{n-2}+\cdots+A(1+r)+A=Q(1+r)^n;$$

对于等额本金还款法，有

$$\left(\frac{Q}{n}+Qr\right)(1+r)^{n-1}+\left[\frac{Q}{n}+\left(Q-\frac{Q}{n}\right)r\right](1+r)^{n-2}+\cdots$$
$$+\left(\frac{Q}{n}+\frac{2Q}{n}\cdot r\right)(1+r)+\left(\frac{Q}{n}+\frac{Q}{n}\cdot r\right)=Q(1+r)^n.$$

也就是说，两种还款方式逐月还款额的终值之和(称为年金终值)是一样的，贷款人所付出的利息相同，均为$[Q(1+r)^n-Q]$.

◆ 评价与思考

尽管等额本金和等额本息还款方式对于贷款人所付出的利息来

说都是一样的，但这两种还款方式有各自的特点.

等额本息还款法的特点是还款额每月相同，适宜家庭的开支计划，特别是年轻人，可以采用等额本息法.

等额本金还款法的特点是在贷款期的前段时间还款额较高，适合在前段时间还款能力强的贷款人，年龄大的可采用等额本金还款法，因为随着年龄增大或退休，收入可能会减少.

思考：利用互联网搜集有关两种贷款方式的讨论或争议. 如果贷款人能够提前还贷，那么这两种还款方式一样吗？如果预期未来的利率会降低或提高，那么应选择何种还款方式？

案例分析

圆锥曲线的焦点弦是指经过圆锥曲线焦点的直线被圆锥曲线截得的线段.

2. 探究抛物线焦点弦的端点处切线的交点轨迹.

在解析几何的学习中，我们经常会遇到探求动点轨迹的问题. 这类问题可以借助动态几何软件作出动态图形，从观察中发现某些现象，从现象中猜测某些性质，再对猜测的性质进行证明或反驳.

◆ 操作与演示

(1) 在 GGB 的指令栏内输入“y^2=2px”，并确认“创建滑动条：p”，作出抛物线 $y^2=2px$；

(2) 输入“$F=(p/2, 0)$”，作出焦点 F，用“直线”工具作出过点 F 与抛物线上一点 A 的直线，交抛物线于另一点 B；

(3) 选择“切线”工具，分别作出过 A 和 B 的抛物线的切线，两条切线的交点为 C(图 2).

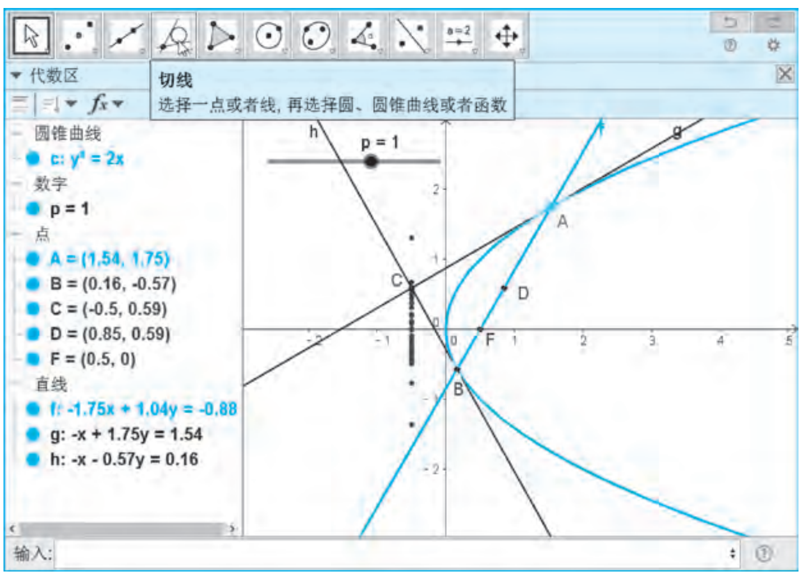


图 2

◆ 观察与猜想

“跟踪”C，拖动点 A，观察点 C 的轨迹，可以发现并猜想：

(1) 点 C 在一条垂直于 x 轴的直线上，且此直线为抛物线的

准线；

(2) 点 C 对焦点弦的张角为直角(即点 C 在以 AB 为直径的圆上)；

(3) 点 C 与焦点弦 AB 的中点 D 的连线 CD 平行于 x 轴；

(4) $CF\perp AB$；

……

对于不同的 p(拖动滑动条)，可以直观地观察到上述猜想都是成立的.

◆ 探究与证明

利用动态几何软件演示观察得到的结论尚需通过数学运算或逻辑推理进行确认. 毫无疑问，动态几何软件能够直观地呈现变化中的不变关系，有助于我们发现探究的目标，提高探究的效率.

下面我们利用两个已知结论证明上述猜想.

对于抛物线焦点弦的问题，3.3 节“抛物线”习题 3.3(2)第 8 题给出了一个重要的结论：

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$是抛物线 $y^2=2px$ 焦点弦的两个端点，则有 $y_1y_2=-p^2$.

试用导数的几何意义推出此结论.

另外，我们有“过抛物线 $y^2=2px$ 上一点(x_0, y_0)的切线方程为 $y_0y=p(x+x_0)$”，利用这一结论，可知切线 AC 和 BC 的方程分别为

$$y_1y=p(x+x_1),$$
$$y_2y=p(x+x_2).$$

由 $k_{AC}k_{BC}=\dfrac{p}{y_1}\cdot\dfrac{p}{y_2}=\dfrac{p^2}{y_1y_2}=\dfrac{p^2}{-p^2}=-1$，故猜想(2)成立.

联立直线 AC 和 BC 的方程，消去 y，得

$$x=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_1-y_2}=\frac{\dfrac{y_1^2}{2p}\cdot y_2-\dfrac{y_2^2}{2p}\cdot y_1}{y_1-y_2}=\frac{y_1y_2}{2p}=\frac{-p^2}{2p}=-\frac{p}{2}.$$

将直线 AC 和 BC 的方程两边相减，得

$$y=p\cdot\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=p\cdot\frac{\dfrac{y_1^2}{2p}-\dfrac{y_2^2}{2p}}{y_1-y_2}=\frac{y_1+y_2}{2}=y_D.$$

这说明点 $C\left(-\dfrac{p}{2}, y_D\right)$ 的轨迹就是抛物线的准线 $x=-\dfrac{p}{2}$，且点 C 与焦点弦 AB 的中点 D 的连线 CD 平行于 x 轴，故猜想(1)(3) 也成立.

思　考

尝试给出猜想(4)的证明.

反思与拓展

案例 2 实际上涉及抛物线焦点弦的一个性质. 焦点弦的性质既可以从度量关系进行考察，如焦点弦的端点坐标之间的关系，弦长，焦点弦的端点与原点构成的三角形面积等；还可以从位置关系或点的轨迹进行研究，如以焦点弦为直径的圆与准线的位置关系，焦点弦的中点轨迹，焦点弦端点处的切线的交点轨迹等.

对案例 2 可以做如下拓展：

(1) "观察与猜想"中的结论如果成立，那么其逆命题是否也成立？(例如，"过抛物线准线上的点作抛物线的两条切线，切点弦过抛物线的焦点"正确吗？)

(2) 如果将焦点弦改为过抛物线对称轴上一定点的弦，结论如何？

(3) 如果将焦点弦改为过任一定点的弦，结论又将如何？

(4) 如果将抛物线改为椭圆或双曲线，还有类似的结论吗？

课题推荐

数学建模和数学探究活动实际上是"做数学、学数学、用数学"的过程，体现了数学的应用价值和科学价值. 通过数学建模和数学探究活动，学会在数学学习或生产生活中发现新的问题、新的可能性，从新的角度审视旧的问题，需要创造性的想象力.

结合本册学习内容，以下课题供同学们研究讨论. 你也可以通过相关刊物和网站查找或发现感兴趣的研究课题，参照《数学(必修第一册)》"数学建模与数学探究"专题所介绍的"选题、开题、做题和结题"环节，独立或与同伴合作开展数学建模和数学探究活动.

(1) 某人于 2011 年 4 月以公积金贷款的方式向银行贷款 25 万元，20 年还清，还款方式为等额本息还款，年利率为 4.5%，每月需还 1 581.62 元. 但该贷款人认为，"月利率＝年利率/12"的计算方式是错误的，因为用这种计算方式得出的年利率为 4.594%，导致贷款人 20 年多还约 3 000 元. 你认为贷款人的说法正确吗？

(2) 斐波那契数列的递推关系、通项公式各是什么？怎样互相推出？斐波那契数列有哪些性质及应用？

(3) 自主选择中学生数学建模或数学探究获奖(或发表)的论文，介绍讲解并点评.

(4) 圆锥曲线焦点弦的性质及应用.

(5) 利用 GGB 或其他软件探究平面内到两定点的距离之积为定值的点的轨迹.

说　　明

江苏凤凰教育出版社出版的《普通高中教科书·数学》是根据教育部制定的《普通高中数学课程标准(2017 年版)》编写的.

该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需求.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到"入口浅,寓意深".通过创设合适的问题情境,引导学生进行操作、观察、探究和运用等活动,感悟并获得数学知识与思想方法.在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识和应用意识,提升他们的数学学科核心素养.

教科书按知识发展、背景问题、思想方法、核心素养四条主线,通过问题将全书贯通.每个主题围绕中心教育目标展开,每章围绕核心概念或原理展开.教科书充分关注数学与自然、生活、科技、文化、各门学科的联系,让学生感受到数学与外部世界是息息相通、紧密相连的.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间.整个教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择.学好核心内容后,根据需要,学生有多种选择,每一个人都能获得必备的数学素养与最优发展.

衷心感谢 2004 年版《普通高中课程标准实验教科书·数学》(苏教版)的主编单墫教授,副主编李善良、陈永高、王巧林,以及所有编写的专家,审读、试教教师.

众多的数学家、心理学家、数学教育专家、特级教师参加了本套教科书的编写与讨论工作.史宁中、鲍建生、谭顶良等教授对教科书编写提出许多建议,陈光立、于明等老师参与本书的编写设计与讨论,在此向他们表示衷心感谢!

感谢您使用本书,您在使用本书时有建议或疑问,请及时与我们联系,电话:025－83658737,电子邮箱:sjgzsx@126.com,lishanliang2019@126.com,466606351@qq.com.

本书编写组

2019 年 9 月


YOUJ
365优教
大学生共享家教联盟
致力于用榜样的力量提升学生成绩的共享家教平台
中 国 家 庭 教 育 学 会 荣 誉 会 员 单 位
985/211大学生
1对1上门辅导
找家教就像叫“代驾”一样简单
家长们都在偷偷用的家教预约神器
记得拍照留存哦
扫码关注 预约上门
关注送200元优惠券
小初高全科辅导
学霸云集任您挑
学历真实可担保
与优秀大学生同行，激发孩子无限潜能
微信搜索公众号：365优教网
咨询热线：4000—711—365
YOUJ优教
既是找老师，更是找榜样
家教老师全国招募中